



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Facoltà di Ingegneria

Dipartimento di Elettrotecnica Elettronica Informatica
Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria dell'Automazione

Tesi di Laurea in
Identificazione dei Modelli ed Analisi dei Dati

**CONTROLLO D'ASSETTO
DI SATELLITI CUBESAT:
ANALISI, PROGETTO E SIMULAZIONE**

Laureando
Andrea Assalone

Relatore
Chia.mo prof. Thomas Parisini

Correlatori
prof. Marco Lovera
prof.ssa Anna Gregorio

ANNO ACCADEMICO 2009-2010

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Obiettivi di missione	1
1.2	Struttura e obiettivi della tesi	2
2	Il progetto AtmoCube	5
2.1	AtmoCube	5
2.1.1	Sistema di alimentazione	8
2.1.2	Sistema di comunicazioni	10
3	Modello dell'ambiente spaziale	11
3.1	Campo gravitazionale terrestre	11
3.2	Densità atmosferica	13
3.3	Campo magnetico terrestre	15
3.3.1	Modello del campo magnetico terrestre	17
4	Dinamica orbitale	21
4.1	Orbite Kepleriane	21
4.1.1	Orbite ellittiche	23
4.1.2	Anomalia vera ed anomalia eccentrica	24
4.1.3	Orbite Kepleriane nello spazio	24
4.1.4	Trasformazioni tra sistemi a coordinate Cartesiane	26
4.1.5	Trasformazione da $[\alpha]$ a $[v, r]$	28
5	Dinamica d'assetto	31
5.1	Momento della quantità di moto di un corpo rigido	31
5.2	Parametrizzazione d'assetto	33

6	Equazioni del moto perturbate	35
6.1	Disturbi dovuti alla non-sfericità della Terra	37
6.2	Disturbi dovuti a forze esterne	38
6.2.1	Disturbi dovuti a forze aerodinamiche	38
6.2.2	Disturbi dovuti a gradiente di gravità	40
6.2.3	Equazioni del moto perturbate	40
7	Controllo d'assetto con attuatori magnetici: generalità e progetto per AtmoCube	43
7.1	Attuatori di controllo	43
7.2	Magnetometro	45
7.3	Dinamica linearizzata	46
7.4	Leggi di controllo	48
7.4.1	Legge di controllo B-Dot	48
8	Simulazioni	53
8.1	Modello dinamica orbitale e ambiente	53
8.2	Modelli d'assetto, del sistema di controllo e validazione risultati	60
8.3	Risultati delle leggi di controllo	64
8.3.1	Simulazioni considerando rumore, dipolo residuo e lancio	64
8.3.2	Controllo a commutazione	68
9	Conclusioni	75
A	Elementi di Astrodinamica	77
A.1	Sistemi di Riferimento	77
A.2	Tempo	79
B	Parametrizzazione d'assetto	81
B.1	Introduzione	81
B.2	Matrice dei Coseni Direttori	81
B.2.1	Proprietà Base della Matrice dei Coseni Direttori	82
B.3	I Quaternioni	83
B.3.1	Quaternioni e la Matrice dei Coseni Direttori	84
C	Documentazione Magnetometro	85

Elenco delle figure

2.1	Nanosatellite AtmoCube.	6
2.2	Schema a blocchi del sistema complessivo.	6
2.3	Schema del sistema di alimentazione.	9
3.1	Venti solari e magnetosfera terrestre, interpretazione artistica.	16
3.2	Linee di forza per il campo magnetico Terrestre. In prima approssimazione, il campo può essere visto come un dipolo. Il dipolo è inclinato rispetto all'equatore, con coelevazione $\theta_m = 167.6^\circ$ e longitudine EST $\phi_m = 109.3^\circ$	16
4.1	Posizionamento dei vettori in un sistema ai due corpi.	22
4.2	Definizione geometrica di un'orbita ellittica	23
4.3	Interpretazione geometrica per ricavare anomalia vera ed eccentrica.	24
4.4	Parametri che definiscono la posizione delle orbite nello spazio.	25
4.5	Direzione dell'equinozio di primavera.	26
4.6	Trasformazione di coordinate bi-dimensionali.	27
4.7	Trasformazione da parametri orbitali a coordinate Cartesiane.	28
5.1	Sistema di riferimento per il corpo rigido	32
6.1	Per dare un'idea visiva dell'effetto si rappresenta la Terra come una sfera circondata da una fascia equatoriale di materia in eccesso che rappresenta il rigonfiamento all'equatore.	36
7.1	Momento di dipolo magnetico generato da una corrente che fluisce attraverso una spira	44
7.2	Posizionamento degli assi d'esempio.	50
8.1	Rappresentazione a blocchi del modello realizzato	54
8.2	Rappresentazione del blocco <i>Ambiente e Orbita</i>	55
8.3	Evoluzione nel tempo del modulo del vettore posizione.	55
8.4	Evoluzione nel tempo del modulo del vettore velocità	56

8.5	Densità atmosferica e drag aerodinamico per AtmoCube.	57
8.6	Campo magnetico terrestre calcolato in coordinate polari.	57
8.7	Forza aerodinamica valutata lungo un'orbita.	58
8.8	Coppia aerodinamica valutata lungo un'orbita.	59
8.9	Effetti aerodinamici sui parametri orbitali.	60
8.10	Test sulle velocità angolari.	62
8.11	Andamento dei quaternioni nel tempo.	63
8.12	Risultati B-dot con segno, con attuatore lungo i tre assi corpo. 3 orbite simulate.	65
8.13	Confronto tra le tecniche di controllo B-dot lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 4 orbite simulate	66
8.14	Confronto tra le correnti erogate delle tecniche di controllo B-dot lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 5 orbite simulate	67
8.15	Confronto tra le tecniche di controllo lungo 1 e 3 assi considerando del rumore di misura. 5 orbite simulate.	69
8.16	Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate	70
8.17	Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate	71
8.18	Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate	72
A.1	Punto zenith e nadir	78
A.2	Riferimento corpo	79
A.3	Moti apparenti per il Sole, Sole fittizio e il Sole Principale	80
B.1	Orientamento degli assi del satellite x,y,z rispetto al sistema di riferimento 1,2,3	82

Elenco delle tabelle

2.1	Dati tecnici Liulin mini	7
2.2	Dati tecnici magnetometro	7
2.3	Dati tecnici Magneto Torquer	8
2.4	Dati celle solari	9
2.5	Bilancio di potenza	9
3.1	Coefficienti di Harris-Priester minimi e massimi per la densità atmosferica valutati in un range d'altitudini tra 100 e 1000 Km. Le densità sono espresse in g/Km^3	14
3.2	Coefficienti di Gauss per il modello IGRF-10, arrestato all'ordine e al grado 8.	17

Introduzione

Da alcuni anni una collaborazione tra il Dipartimento di Fisica e il Dipartimento di Elettronica, Elettrotecnica e Informatica dell'Università degli studi di Trieste sta realizzando il progetto AtmoCube, un nanosatellite della famiglia CubeSat il cui intento, didattico e scientifico, è quello di rendere gli studenti protagonisti della realizzazione di una missione spaziale a partire dalla sua ideazione, realizzazione e di tutte quelle fasi di cui si compone una missione spaziale, fino al termine di vita del nanosatellite.

Dal punto di vista didattico, si tratta di un'esperienza unica nel suo genere perchè lo studente può essere coinvolto in dinamiche diverse rispetto a quelle prettamente accademiche, avendo la possibilità di cooperare all'interno di una squadra composta da studenti e professori.

1.1 Obiettivi di missione

Il satellite è rivolto allo studio dei fenomeni di *space weather* tipici della parte alta dell'atmosfera terrestre, sempre più sfruttata da numerose costellazioni di satelliti e scenario delle più recenti missioni spaziali. Il carico scientifico prevede infatti l'installazione di tre strumenti per misurare il campo magnetico e le caratteristiche dei venti solari per tutta la durata della missione.

Gli obiettivi scientifici della missione AtmoCube possono essere riassunti in questo modo:

- misurare la densità di flusso magnetico dovuto al campo magnetico terrestre;
- registrare l'intensità di radiazione dovuta all'attività solare;
- misurare la densità dell'alta atmosfera.

Il progetto ha inoltre un forte interesse educativo. L'Università e le altre istituzioni coinvolte con le loro infrastrutture permetteranno agli studenti di migliorare le loro conoscenze scientifiche e tecnologiche. Grazie al coinvolgimento dei Dipartimenti

di Fisica, Elettronica, Elettrotecnica e Meccanica dell'Università di Trieste, AtmoCube ha inoltre un contenuto fortemente scientifico che permette un coinvolgimento ancora maggiore degli studenti: una missione come AtmoCube, infatti, sia per la ridotta fase di sviluppo sia per la strumentazione posta a bordo, può essere considerato il precursore di una serie di missioni scientifiche a basso costo per l'analisi dell'atmosfera terrestre.

1.2 Struttura e obiettivi della tesi

Il presente elaborato si colloca all'interno del lavoro svolto in questi ultimi anni dall'intero staff di AtmoCube nello sviluppo del satellite; più specificatamente, all'interno di questa tesi verranno affrontati tutti i temi che riguardano il controllo d'assetto.

Il primo passo è stato quello di approcciarsi alla conoscenza di tutti quei componenti di cui è dotato AtmoCube che possono influenzare la dinamica d'assetto, nonché conoscere nei dettagli il profilo di missione della navicella. I sottosistemi, la strumentazione e i dettagli di missione sono descritti nel Capitolo 2.

Nel suo moto nello spazio un corpo deve affrontare l'ambiente che lo circonda: questo varia sensibilmente a seconda dell'altitudine a cui si trova il corpo. Alcuni degli elementi che compongono l'ambiente, che non possono assolutamente mancare nell'analisi di una missione di questo tipo, sono il campo gravitazionale terrestre, la densità atmosferica e il campo magnetico terrestre. La densità atmosferica è formata da una composizione chimica di gas che circonda la Terra, in prima approssimazione si può descrivere l'atmosfera come la regione che va dal livello del mare fino a circa 1000 km d'altezza. L'atmosfera che circonda la Terra varia la sua composizione e la sua densità man mano che aumenta l'altezza dalla superficie del pianeta; ad altezze simili a quelle che verranno raggiunte da AtmoCube, l'atmosfera è più rarefatta di quanto non lo sia vicino alla superficie.

Poichè AtmoCube produrrà delle misure di campo magnetico, grazie ad un magnetometro posto a bordo della navicella, è importante fornire un modello del campo magnetico, anche perchè risulterà di importanza vitale quando si andranno a discutere le tipologie di controllo dell'assetto. La Terra è circondata da un campo magnetico di forma approssimativamente dipolare generato all'interno del nucleo liquido del pianeta in seguito alla formazione di correnti elettriche. Un modello del campo gravitazionale terrestre, della densità e del campo geomagnetico sono forniti al Capitolo 3.

Il passo successivo è stato quello di approfondire le competenze teoriche fondamentali per affrontare una missione di questo tipo; si è dunque passati allo studio della dinamica orbitale, cioè tutte quelle leggi che governano il moto di un satellite nello spazio. Per orbita si intende il percorso che un corpo effettua nella sua rotazione, ad esempio, intorno alla Terra; ogni orbita è caratterizzata da un determinato valore di energia, che definisce la geometria dell'orbita stessa. Si introdurranno successivamente le leggi di Keplero che descrivono le classiche equazioni del moto di un corpo

nello spazio attraverso il ben noto problema dei due corpi. Una trattazione di questi argomenti, con particolare attenzione agli elementi orbitali classici viene fornita nel Capitolo 4.

Al Capitolo 5 si affronteranno le problematiche relative alla dinamica d'assetto di una navicella soggetta a forze esterne; in questo capitolo quindi si definiranno tutte le grandezze che saranno poi necessarie per poter trattare il problema del controllo e poterne capire i risultati; inoltre in questo capitolo si affronterà anche il tema della parametrizzazione d'assetto.

Il capitolo 4 provvede a fornire un'analisi di orbite ideali non soggette a forze esterne; nel capitolo 6 si considereranno i disturbi più rilevanti a cui sarà soggetto il satellite nel suo moto. Una navicella che attraversa l'atmosfera terrestre è soggetta all'attrito atmosferico; questo attrito è la forza non gravitazionale, che agisce su un satellite a basse orbite, più rilevante. Altri disturbi considerati sono quelli derivanti dal gradiente di gravità, dalla triassialità della Terra ed altri ancora. Questi disturbi causano una variazione dei parametri orbitali che incidono sul tempo di vita del satellite: in pratica l'orbita in cui si muove la navicella ha, per effetto di questi disturbi, una perdita di energia rispetto all'orbita ideale.

Effettuare il controllo dell'assetto di un satellite significa limitarne le rotazioni sui tre assi corpo della navicella stessa: nel capitolo 7 si definiranno gli strumenti (attuatori e strumenti di misura), posti all'interno di AtmoCube, che serviranno per attuare le politiche di controllo che saranno presentate in questo capitolo.

Infine al capitolo 8 si presenteranno le generalità del modello ottenuto, spiegandone le varie parti e mostrandone i risultati acquisiti attraverso il simulatore così realizzato; ovviamente i risultati maggiormente rilevanti ai fini della presente tesi sono quelli relativi al sistema di controllo. Tutti i passi che sono stati effettuati prima di giungere al sistema di controllo sono necessari per avere a disposizione una simulazione attinente alla realtà.

Le appendici completano la discussione presentata: l'Appendice A riporta una trattazione dei sistemi di riferimento usati e dei riferimenti temporali maggiormente usati in astrodinamica; l'Appendice B tratta tutte quelle grandezze che vengono utilizzate nella parametrizzazione dell'assetto; infine l'Appendice C fornisce le caratteristiche tecniche dello strumento chiave per la determinazione d'assetto, che è il magnetometro.

Volendo riassumere in un elenco gli obiettivi finora esposti, questi sono:

- studio di tutte le dinamiche che interesseranno AtmoCube nel suo moto;
- realizzazione di un modello che utilizzi tutte le conoscenze emerse;
- studio dettagliato delle possibili politiche di controllo attuabili, evidenziandone pregi e difetti delle varie soluzioni;
- valutazione dei risultati delle simulazioni effettuate sul modello appena definito.

I principali risultati ottenuti riguardano:

- la definizione e sviluppo di un ambiente di simulazione, adatto alla modellistica e simulazione di piccoli satelliti in orbite basse;
- l'analisi del problema del controllo d'assetto per satelliti equipaggiati con bobine magnetiche come attuatori primari per il controllo d'assetto. In questa analisi sono state definite tre tecniche fondamentali di controllo, che permettono il controllo di satelliti di piccole dimensioni. I risultati di quest'analisi verranno utilizzati nell'ambito del progetto di un sistema di controllo per AtmoCube.

Il progetto AtmoCube

In questo capitolo si spiegheranno le finalità del progetto didattico AtmoCube e si forniranno tutte le informazioni relative alla strumentazione di bordo del nanosatellite; è fondamentale avere conoscenza di ciò in quanto la strumentazione limita le possibilità di scelta del tipo di controllo da attuare. Infatti, come si vedrà, la scelta di avere a bordo un magnetometro, permette di scegliere tra alcune politiche di controllo e di scartarne altre.

2.1 AtmoCube

AtmoCube è un nanosatellite, vedi figura 2.1, di forma cubica delle dimensioni di dieci centimetri di lato e del peso massimo di 1 kg; il progetto ha lo scopo principale di produrre una mappa precisa sia del campo magnetico terrestre sia del flusso di radiazione incidente sullo strumento.

AtmoCube rappresenta un sistema di misurazione innovativo per lo studio dell'ambiente spaziale al di sopra dei 350 km d'altitudine. E' stato deciso di usare la piattaforma internazionale CubeSat, una struttura 'quasi-standard' di nano-satelliti che permette di iniziare a trattare una missione di questo tipo da delle basi già consolidate. L'idea dei CubeSat è stata sviluppata dalla California Polytechnic State University e dalla Stanford University e si tratta di una collaborazione internazionale tra più di sessanta università mondiali per la costruzione di piccoli satelliti finalizzati alla ricerca scientifica.

In accordo con le specifiche del lanciatore VEGA, l'orbita del nanosatellite sarà ellittica, tra 350 e 1200 km con un'inclinazione rispetto al piano equatoriale di 71°. Il tempo di vita del satellite varia in accordo con l'attività solare, con un valore minimo di circa sei mesi.

La sua strumentazione scientifica comprende:

- **Spettrodosimetro.** Lo spettrodosimetro è lo strumento scientifico principale e permette di misurare lo spettro delle radiazioni incidenti. Il modello che si installerà sulla navicella è un *Liulin mini* e necessita di essere interfacciato



Figura 2.1: Nanosatellite AtmoCube.

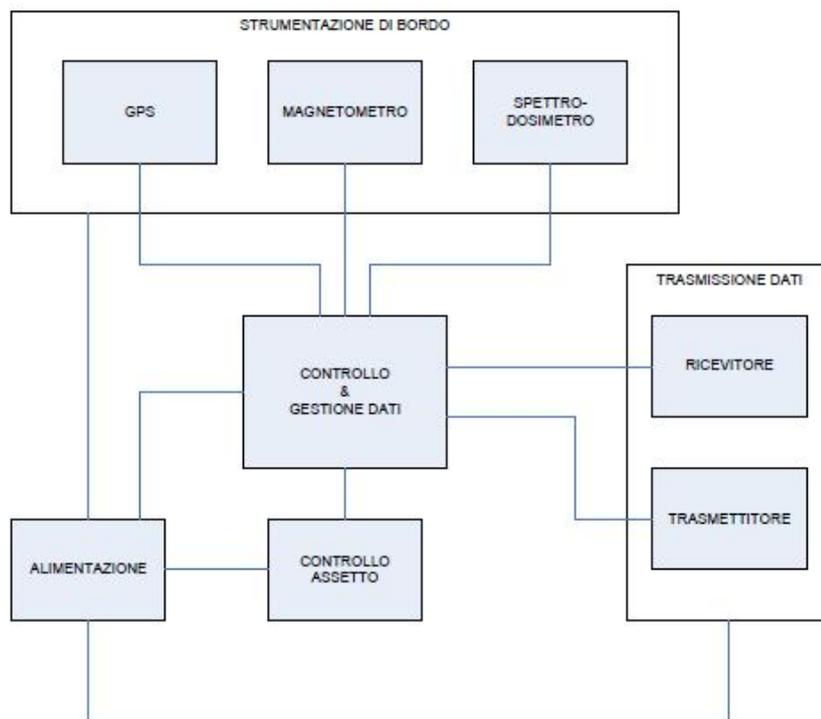


Figura 2.2: Schema a blocchi del sistema complessivo.

Tensione di Alimentazione (V)	8 ÷ 12
consumo (mW)	180 (max)
Corrente massima (mA)	15
Uscita dati	RS232 full-duplex @1024 bit/s

Tabella 2.1: Dati tecnici Liulin mini

Tensione di alimentazione (V)	6 ÷ 15 (normale) 12(reset)
Consumo (mW)	160
Corrente massima (mA)	20 (normale) 3200/2 μ s (reset)
Uscita dati	analogica

Tabella 2.2: Dati tecnici magnetometro

solo con il microcontrollore e l'alimentazione. I dati tecnici sono visibile nella tabella 2.1. Lo spettrodosimetro quantizza i dati misurati mediante un ADC con una risoluzione di 12 bit per 1024 canali. Anche se la risoluzione dell'ADC è di 12 bit, lo spazio effettivamente occupato da un singolo campione di memoria è di 16 bit (2 B); tuttavia, al fine di non trasmettere informazioni inutili, in fase di trasmissione saranno omessi i bit non significativi e inviati solo i 12 effettivi del campione.

- **Magnetometro.** Il magnetometro misura il campo magnetico terrestre che interesserà il satellite per tutta la durata della missione. I valori registrati, oltre ad essere dati sperimentali, verranno utilizzati anche dal sistema di controllo dell'assetto del satellite. Come si vede nella tabella 2.2, l'uscita del magnetometro è analogica e il valore del campo magnetico viene fornito nelle tre componenti di un sistema di riferimento cartesiano riferito alla scheda su cui è montato. Il valore misurato si preleva da tre piedini (uno per ogni asse) e ha una tensione compresa tra 0,5 e 4,5 V. E' quindi necessaria una conversione analogico - digitale per ognuna delle tre uscite: ognuna di esse sarà collegata a un multiplexer a tre vie, collegato a sua volta a un ADC di adeguata risoluzione.
- **GPS.** Il sistema GPS (*Global Positioning System*) fornisce in tempo reale la posizione del satellite nello spazio. Serve principalmente per associare una posizione ai dati misurati dallo spettrodosimetro e dal magnetometro, in modo da consentirne la mappatura; con opportuni accorgimenti i dati relativi alla posizione possono essere utilizzati nel controllo dell'assetto. Se la sensibilità del GPS rispettasse certi vincoli i dati trasmessi a Terra potrebbero essere elaborati per produrre una misura indiretta della densità atmosferica alla quota dell'orbita percorsa dal satellite. Attualmente non è stato ancora scelto il

Tensione di Alimentazione (V)	3.3
consumo (W)	165 (max)
Corrente massima (mA)	50 (normale) 100 (massima)
Resistenza (Ω)	66
Uscita dati	-
Formato dati	-
Quantità dati	-

Tabella 2.3: Dati tecnici Magneto Torquer

modello di GPS che verrà montato all'interno della navicella, quindi non è possibile ancora fornire le caratteristiche specifiche dello strumento.

- **Attuatori.** Gli attuatori sono i dispositivi elettromeccanici o i servomeccanismi che dispiegano gli elementi alloggiati all'interno del satellite durante la fase di lancio. Dopo l'espulsione del satellite dal veicolo del lanciatore è possibile mettere in posizione le antenne e un eventuale boom per il controllo dell'assetto. Per il controllo d'assetto gli attuatori utilizzati sono dei magnetic torquer, che sono delle bobine magnetiche: quando si applica una tensione ai capi della spira, viene creata una corrente che, percorrendo la spira, genera un dipolo; i magnetic torquer sono usati per controllare le navicelle, in quanto si ottengono coppie di controllo $T_c = m \times B$, dove $m = NIAc$ con N numero di spire della bobina, A area occupata dalla bobina, I corrente che percorre la bobina e c è il versore dell'asse della bobina, e B è il campo magnetico terrestre. I vantaggi principali di una soluzione di questo tipo, sono principalmente che non richiedono combustibile per funzionare e sono continuamente controllabili. Gli svantaggi, invece, sono il fatto di avere una forte variabilità del campo magnetico, consumano energia elettrica, possono interferire con la strumentazione di bordo e non forniscono coppia nella direzione del campo magnetico. I Magneto Torquer impiegati su AtmoCube devono soddisfare i vincoli visibili nella tabella 2.3.

2.1.1 Sistema di alimentazione

Il sistema di alimentazione di un satellite ha il compito di produrre, accumulare e distribuire l'energia elettrica a tutti i sottosistemi per garantire il loro normale funzionamento. Nella figura 2.3 si mostra uno schema a blocchi del funzionamento del sistema d'alimentazione.

La fonte primaria di energia sfruttata da AtmoCube è l'energia solare, che viene convertita in energia elettrica con dei pannelli solari (si veda tabella 2.4) distribuiti sulla superficie esterna del satellite. I pannelli solari devono essere in grado di fornire sufficiente potenza per ricaricare le batterie e per permettere ad AtmoCube di

Potenza nominale	0.027 W/cm ²
Rendimento	27 %
Dimensioni cella	Larghezza 15.5 mm Lunghezza 31.8 mm
Superficie cella	492.9 mm ²

Tabella 2.4: Dati celle solari

Sottosistema	Tensione	Corrente (valori massimi)
GPS	3.3 V	0.20 A
Commutatore RX/TX	3.3 V	0.10 A
LNA (Circuito del Front End del ricevitore)	5 V	0.02 A
Amplificatore di potenza	5 V	2.00 A
Commutatore d'antenna	5 V	0.02 A

Tabella 2.5: Bilancio di potenza

compiere tutte le operazioni durante i periodi di esposizione ai raggi solari. La superficie a disposizione è molto piccola e, per ottenere più energia possibile, è previsto l'uso di pannelli a tripla giunzione che offrono un'efficienza maggiore rispetto alle comuni celle fotovoltaiche. Se non viene impiegata direttamente, l'energia elettrica convertita, viene immagazzinata in una batteria al litio, dimensionata in modo da soddisfare il fabbisogno energetico anche quando il satellite è nella fase di eclissi.

Oltre a rendere disponibile l'energia necessaria, il sistema di alimentazione provvede a fornire in modo continuativo, per tutta la durata della missione, l'energia elettrica a tutti i sottosistemi a seconda delle loro necessità, un'analisi delle potenze impiegate, per i sottosistemi non ancora presi in esame, su AtmoCube è visibile nella tabella 2.5. La potenza totale prodotta dalle celle fotovoltaiche è di 2.5 W circa, usando otto celle (due su ogni faccia del cubo). La potenza consumata totale dipende dalle misure che si devono compiere (misure effettuate con il GPS, con il

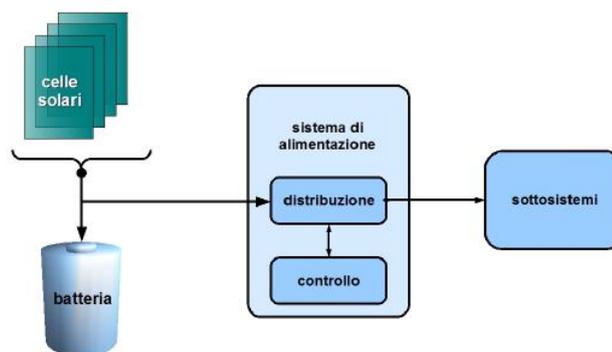


Figura 2.3: Schema del sistema di alimentazione.

magnetometro...) e dal meccanismo di trasmissione dei dati. Alcuni lavori precedenti a questo, hanno mostrato come in condizioni di eclissi in una giornata, l'energia media richiesta è pari a 62967,6 J (circa 17.5 W·h), con un'energia media disponibile di 104050 J (circa 28.9 W·h).

2.1.2 Sistema di comunicazioni

Il sistema di comunicazione è l'interfaccia che deve garantire una comunicazione affidabile tra il sistema di controllo e l'operatore della stazione a Terra. I suoi compiti sono di trasmettere a Terra i dati sperimentali e la telemetria e comunicare al sistema di controllo i comandi e i dati ricevuti dalla stazione a Terra.

Il sistema di comunicazione di AtmoCube, avendo l'intenzione di essere un sistema aperto ed eventualmente condivisibile da altre missioni CubeSat, si basa su tecniche di trasmissione satellitare di tipo radioamatoriale, che costituiscono una sorta di standard aperto; sono infatti definiti il tipo di emissione, la sua occupazione di banda, la modulazione (FSK), il tasso di trasmissione,... Decidere di sviluppare il sistema di comunicazione con queste caratteristiche presenta il vantaggio di avere molti aspetti dell'architettura di comunicazione già fissati (ad esempio la modulazione, il tasso di trasmissione, eccetera), ma anche taluni svantaggi, come un tasso di trasmissione troppo basso rispetto alla quantità di dati che si vorrebbe trasmettere. Dato però il carattere sperimentale del progetto, questi svantaggi sono tollerabili.

Capitolo 3

Modello dell'ambiente spaziale

Lo scopo principale di questo capitolo è quello di fornire le informazioni necessarie a poter definire l'ambiente all'interno del quale si muoverà AtmoCube, in quanto realizzare un modello adeguato per l'ambiente, la cui composizione nel caso in esame può essere ricondotta all'analisi del campo magnetico terrestre, della densità atmosferica e del campo gravitazionale terrestre, è di importanza primaria quando modellizziamo il comportamento di una navicella.

3.1 Campo gravitazionale terrestre

Il potenziale gravitazionale terrestre può essere definito, sotto l'ipotesi di distribuzione di massa uniforme, come:

$$U_g(r) = GM \frac{1}{r} \quad (3.1)$$

dove r identifica il generico punto locato nello spazio ed è riferito rispetto al centro del pianeta, in coordinate inerziali (vedi appendice A), G è la costante universale gravitazionale e vale $6.669 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kg} \cdot \text{s}^2$ e M rappresenta la massa della Terra. L'equazione (3.1) per il potenziale gravitazionale $U_g(r)$ in un dato punto r può essere facilmente generalizzata ad un'arbitraria distribuzione di massa di una funzione di densità assegnata $\rho(r)$ in accordo con

$$U_g(r) = G \int_V \frac{\rho(s)}{|r - s|} dV \quad (3.2)$$

dove dV è un elemento di volume infinitesimo e s rappresenta il generico punto racchiuso nel volume V . Per tale motivo, (3.2) fornisce la distribuzione spaziale del potenziale gravitazionale con una funzione della distribuzione di massa $\rho(s)$ per il suo volume V . Per valutare l'espressione (3.2), l'inverso della distanza $|r - s|$ può essere sviluppata in serie con i polinomi di Legendre. Questi sono definiti come un

set di soluzione per l'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)] + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.3)$$

dove n assume valori in \mathbb{N} . Per tutti i punti che non appartengono al corpo, si ha:

$$\frac{1}{|r-s|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{s}{r}\right)^n P_n(\cos \gamma) \quad (3.4)$$

dove:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.5)$$

è il polinomio di Legendre di grado n e $\gamma = \arccos(\widehat{r} \cdot \widehat{s})$ è l'angolo tra r e s . Introducendo un set di coordinate sferiche (r, λ, ϕ) e (s, λ', ϕ') per i punti r e s^2 si possono sfruttare i teoremi dei polinomi di Legendre che dicono:

$$P_n(\cos \gamma) = \sum_{m=0}^n (2 - \delta_{0m}) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_{nm}(\sin \phi') \cos(m(\lambda - \lambda')) \quad (3.6)$$

dove P_{nm} prende il nome di polinomio associato di Legendre di grado n e ordine m ed è definito come:

$$P_{nm}(x) = (1-x^2)^{(m/2)} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad (3.7)$$

La determinazione del potenziale gravitazionale terrestre è ora:

$$U_g(r) = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R_{equatore}}{r}\right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \quad (3.8)$$

dove M è la massa della terra. La dipendenza dalla distribuzione di massa del pianeta è completamente assegnata dai coefficienti geopotenziali:

$$C_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{s}{R_{equatore}}\right)^n P_{nm}(\sin \phi') \cos(m\lambda') \rho(s) dV \quad (3.9)$$

$$S_{nm} = \frac{2 - \delta_{0m}}{M} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int \left(\frac{s}{R_{equatore}}\right)^n P_{nm}(\sin \phi') \sin(m\lambda') \rho(s) dV. \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

I coefficienti geopotenziali con $m = 0$ sono noti come coefficienti *zonali*, dal momento che sono indipendenti dalla latitudine del punto locato nello spazio. E' degno di nota che, in accordo con la loro definizione, S_{n0} scompaiano, considerato che la notazione $J_n = -C_{n0}$ è comunemente usata per i termini zonali rimanenti. Gli altri coefficienti geopotenziali sono comunemente riferiti a coefficienti *tesserali* (con $m < n$)

e coefficienti *settoriali* (con $m = n$). In accordo con la notazione già usata, il potenziale gravitazionale della Terra può essere descritto da:

$$U_g(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi) + \right. \quad (3.12)$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right\}. \quad (3.13)$$

3.2 Densità atmosferica

La densità dell'atmosfera superiore dipende in maniera complessa da una varietà di parametri; la dipendenza più evidente, tuttavia, è la sua decrescita con l'innalzarsi dell'altitudine, che può essere approssimata così:

$$\rho = \rho_0 \exp^{-\frac{h}{H_0}} \quad (3.14)$$

dove:

- ρ_0 è la densità atmosferica ad una data altitudine;
- H_0 è un fattore di scala, pari a $\frac{RT}{\mu g}$ dove:
- R è la costante universale dei gas;
- T è la temperatura assoluta;
- μ è il peso molecolare dell'atmosfera;
- g è l'accelerazione di gravità.

Un modello del genere, tuttavia, presenta il problema di dover essere in possesso di un modello anche per la temperatura dell'atmosfera superiore, cosa non banale; per questo si preferisce usare modelli relativamente semplici. Uno dei modelli più semplici da utilizzare è il modello di Harris-Priester: questo modello è basato sulle proprietà dell'atmosfera superiore, ottenuta dalla soluzione dell'equazione della conduzione del calore sotto condizioni quasi idrostatiche. Perciò si ricava l'equazione:

$$\rho(h) = \rho_m(h) + (\rho_M(h) - \rho_m(h)) \cos^n\left(\frac{\Psi}{2}\right) \quad (3.15)$$

dove Ψ è l'angolo tra il vettore posizione del satellite all'apice del rigonfiamento diurno. Quindi, le variazioni di densità sono tenute in conto dall'angolo Ψ e da un esponente empirico n , il cui valore varia tra 2, per inclinazioni d'orbita basse, a 6 per orbite polari. I valori di densità minime e massime sono tabellati e sono visibili nella tabella 3.1.

h	ρ_m	ρ_M	h	ρ_m	ρ_M	h	ρ_m	ρ_M
100	497400	497400	280	26.97	50.95	600	0.0807	0.639
120	24900	24900	290	21.39	42.26	620	0.06012	0.5123
130	8377	8710	300	17.08	35.26	640	0.04519	0.4121
140	3899	4059	320	10.99	25.11	660	0.03430	0.3325
150	2122	2215	340	7.214	18.19	680	0.02632	0.2691
160	1263	1344	360	4.824	13.37	700	0.02043	0.2185
170	800.8	875.8	380	3.274	9.955	720	0.01607	0.1799
180	528.3	601	400	2.249	7.429	740	0.01281	0.1452
190	361.7	429.7	420	1.558	5.684	760	0.01036	0.1190
200	255.7	316.2	440	1.091	4.355	780	0.00850	0.0978
210	183.9	293.6	460	0.7701	3.362	800	0.00707	0.0806
220	134.1	185.3	480	0.5474	2.612	840	0.00468	0.0574
230	99.49	145.5	500	0.3916	2.042	880	0.00320	0.0421
240	74.88	115.7	520	0.2819	1.605	920	0.00221	0.0313
250	57.09	93.08	540	0.2042	1.267	960	0.00156	0.02386
260	44.03	75.55	560	0.1488	1.005	1000	0.00115	0.0181
270	34.30	61.82	580	0.1092	0.7997			

Tabella 3.1: Coefficienti di Harris-Priester minimi e massimi per la densità atmosferica valutati in un range d'altitudini tra 100 e 1000 Km. Le densità sono espresse in g/Km^3

3.3 Campo magnetico terrestre

Il campo magnetico terrestre è principalmente generato come conseguenza di correnti elettriche che fluiscono nel nucleo fuso della Terra, che si muove molto lentamente. Ci sono diverse caratteristiche che devono essere messe in evidenza per quanto concerne il campo magnetico terrestre. Possono essere brevemente riassunte come segue:

- **Inversione di Campo.** Il campo geomagnetico non è tempo-invariante; dall'analisi accurata delle direzioni e intensità delle magnetizzazioni, collezionate da diversi siti locati in tutto il mondo, è stato osservato che la polarità del campo magnetico è cambiata molte volte nel passato e ogni inversione di polarità è durata diverse migliaia d'anni. Ben lungi dall'essere trattata come una regola base, questa inversione appare abbastanza imprevedibile. Inoltre, oltre all'inversione piena, sono state scoperte molti tentativi di inversione abortiti, quando i poli magnetici si sono mossi verso l'equatore e poi sono tornati indietro per allinearsi con gli assi terrestri.
- **Variazioni di campo regolari.** Il campo geomagnetico presenta una variazione regolare ciclica con un periodo di 24 ore. Questa variazione, che dipende dalla latitudine, stagione e ciclo solare, è causata da correnti elettriche circolanti nell'atmosfera alta, ad altitudini tra i 100 e 130 Km sopra la superficie terrestre. A queste latitudini l'atmosfera è significativamente ionizzata dai raggi ultravioletti e raggi X del Sole, e gli ioni sono mossi da venti e maree. Questo crea le condizioni affinché una dinamo possa operare: due celle di correnti si formano, una nell'emisfero NORD e una nell'emisfero SUD. L'ampiezza del disturbo magnetico è più grande ad altitudini elevate per la presenza di bande di correnti attorno ad ogni polo geomagnetico. Qualche particella carica viene intrappolata ai bordi della magnetosfera, nelle regioni polari, vengono accelerate lungo le linee del campo magnetico verso l'atmosfera ed infine si urtano con molecole di ossigeno e azoto; il risultato di queste collisioni sono spettacolari emissioni principalmente di luce rossa e verde note come aurora boreale alle latitudini NORD e aurora australe alle latitudini SUD.
- **Variazioni irregolari del campo magnetico.** A parte le sue variazioni regolari, il campo geomagnetico esibisce delle componenti imprevedibili che sono note con il nome di tempeste magnetiche. Variazioni irregolari sorgono dall'interazione dei venti solari con il campo magnetico terrestre. Il vento solare, un flusso di particelle cariche emesse continuamente dal sole, deforma e piega le linee di campo del campo magnetico della Terra, come si può vedere in figura 3.1. L'entità di questa deformazione è strettamente connessa con l'attività solare; quando c'è un disturbo nel vento solare, le correnti esistenti nella magnetosfera aumentano e causano disturbi e tempeste magnetiche.

A dispetto delle complesse dinamiche che lo caratterizzano, il campo magnetico terrestre può essere descritto in prima approssimazione con un modello matematico abbastanza semplice, come il modello del dipolo, raffigurato in figura 3.2.

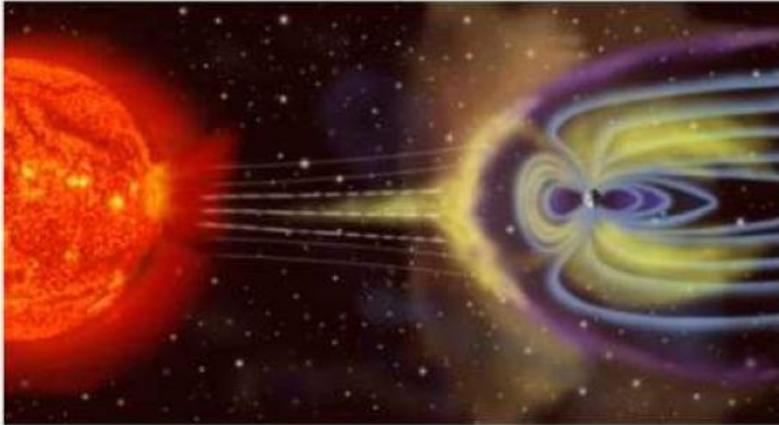


Figura 3.1: Venti solari e magnetosfera terrestre, interpretazione artistica.

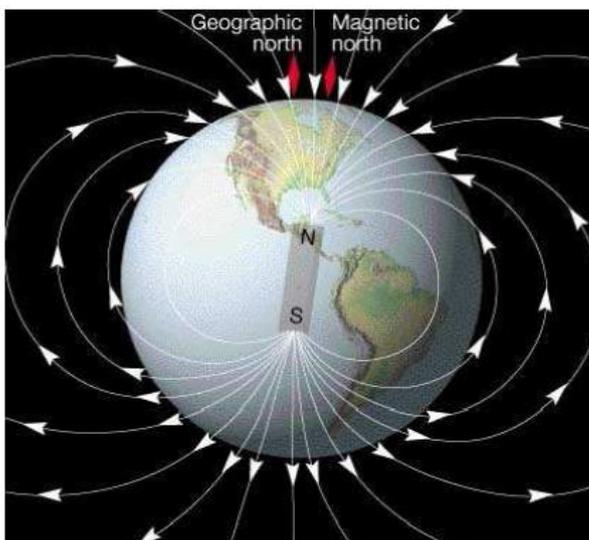


Figura 3.2: Linee di forza per il campo magnetico Terrestre. In prima approssimazione, il campo può essere visto come un dipolo. Il dipolo è inclinato rispetto all'equatore, con coelevazione $\theta_m = 167.6^\circ$ e longitudine EST $\phi_m = 109.3^\circ$.

n	m	g[nT]	h[nT]	n	m	g[nT]	h[nT]	n	m	g[nT]	h[nT]
1	0	-29615	0.0	5	1	351	44	7	3	33	6
1	1	-1728	5186	5	2	222	172	7	4	9	24
2	0	-2267	0.0	5	3	-131	-134	7	5	7	15
2	1	3072	-2478	5	4	-169	-40	7	6	8	-25
2	2	1672	-458	5	5	-12	107	7	7	-2	-6
3	0	1341	0.0	6	0	72	0.0	8	0	25	0.0
3	1	-2290	-227	6	1	68	-17	8	1	6	12
3	2	1253	296	6	2	74	64	8	2	-9	-22
3	3	715	-492	6	3	-161	65	8	3	-8	8
4	0	935	0.0	6	4	-5	-61	8	4	-17	-21
4	1	787	272	6	5	17	1	8	5	9	15
4	2	251	-232	6	6	-91	44	8	6	7	9
4	3	-405	119	7	0	79	0.0	8	7	-8	-6
4	4	110	-304	7	1	-74	-65	8	8	-7	-16
5	0	-217	0.0	7	2	0	-24				

Tabella 3.2: Coefficienti di Gauss per il modello IGRF-10, arrestato all'ordine e al grado 8.

3.3.1 Modello del campo magnetico terrestre

Il campo magnetico terrestre B può essere rappresentato come il gradiente di un potenziale scalare V_m , chiamato potenziale geomagnetico, in accordo con l'espressione:

$$B = -\nabla V_m \quad (3.16)$$

V_m può essere convenientemente approssimato con lo sviluppo in serie di armoniche sferiche troncate al grado k :

$$V_m(r, \theta, \phi) = R_{eq} \sum_{n=1}^k \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)) P_n^m(\cos \theta) \quad (3.17)$$

dove g_n^m e h_n^m sono i coefficienti di Gauss e R_{eq} è il raggio equatoriale medio. La triade (r, θ, ϕ) individua la posizione del generico punto nello spazio, definito dalla distanza geocentrica r , coelevazione θ e longitudine EST dal meridiano di Greenwich ϕ . I coefficienti di Gauss per il potenziale geomagnetico corrispondono all'epoca 2000 13° grado e ordine IGRF-10 e sono visibili nella tabella 3.2

Il modello IGRF-10 del campo magnetico implementato in questo elaborato impiega l'algoritmo che può essere riassunto come segue.

1. A inizio simulazione, si determinino i termini $S_{n,m}$ dalla seguente ricorsione:

$$S_{0,0} = 1 \quad (3.18)$$

$$S_{n,0} = S_{n-1,0} \left[\frac{2n-1}{n} \right] \quad (n \geq 1) \quad (3.19)$$

$$S_{n,m} = S_{n,m-1} \sqrt{\frac{(n-m+1)(\delta_{m1}+1)}{n+m}} \quad (m \geq 1). \quad (3.20)$$

$$(3.21)$$

2. Ad ogni valutazione del campo,

a) si calcolino i coefficienti normalizzati di Gauss da:

$$P^{0,0} = 1 \quad (3.22)$$

$$P^{n,n} = \sin \theta P^{n-1,n-1} \quad (3.23)$$

$$P^{n,m} = \cos \theta P^{n-1,m} - K^{n,m} P^{n-2,m} \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

dove:

$$K^{n,m} = 0 \quad (n = 1) \quad (3.26)$$

$$K^{n,m} = \frac{(n-1)^2 - m^2}{(2n-1)(2n-3)} \quad (n \geq 1) \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

vengono calcolati ad inizio simulazione.

b) Si calcolino le derivate parziali di $P^{n,m}$ riferite a θ , da

$$\frac{\partial P^{0,0}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial P^{n,n}}{\partial \theta} = \sin \theta \frac{\partial P^{n-1,n-1}}{\partial \theta} + \cos \theta P^{n-1,n-1} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial P^{n,m}}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial P^{n-1,m}}{\partial \theta} - \sin \theta P^{n-1,m} - K^{n,m} \frac{\partial P^{n-2,m}}{\partial \theta} \quad (n \geq 2) \quad (3.31)$$

$$(3.32)$$

c) Si calcolino $\cos \phi$ e $\sin \phi$ dalla seguente ricorsione:

$$\cos(m\phi) = \cos((m-1)\phi + \phi) = \quad (3.33)$$

$$= \cos((m-1)\phi) \cos \phi - \sin((m-1)\phi) \sin \phi \quad (3.34)$$

$$\sin(m\phi) = \sin((m-1)\phi + \phi) = \quad (3.35)$$

$$= \sin((m-1)\phi) \cos \phi + \cos((m-1)\phi) \sin \phi \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

d) Infine, si determini il campo magnetico terrestre B come:

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ &= \sum_{n=1}^k \left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)) P_n^m \cos \theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} B_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \\ &= -\sum_{n=1}^k \left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} B_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_{n=1}^k \left(\frac{R_{eq}}{r}\right)^{n+2} (n+1) \sum_{m=0}^n m (g_n^m \sin(m\phi) - h_n^m \cos(m\phi)) P_n^m \cos \theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$(3.41)$$

dove:

$$g^{n,m} = S_{n,m} g_n^m \quad (3.42)$$

$$h^{n,m} = S_{n,m} h_n^m \quad (3.43)$$

Si sono quindi ricavate tre componenti del campo magnetico terrestre B_r , componente radiale, B_θ la componente coelevativa (SUD positiva) e B_ϕ la componente azimutale (EST positiva). Quando si vuole esprimere il campo in coordinate Earth Centered Earth Fixed, acronimo ECEF (vedi appendice A), si utilizzano le seguenti espressioni:

$$B_x = (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \cos \alpha - B_\phi \sin \alpha \quad (3.44)$$

$$B_y = (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \sin \alpha + B_\phi \cos \alpha \quad (3.45)$$

$$B_z = (B_r \sin \delta - B_\theta \cos \delta) \quad (3.46)$$

dove:

- $\delta = 90 - \theta$ è la declinazione;
- α è l'ascensione retta, che è strettamente collegata con la longitudine infatti $\phi = \alpha - \alpha_G$ dove α_G è l'ascensione retta del meridiano di Greenwich o tempo sidereo a Greenwich;

Per ricavare longitudine e latitudine si utilizza il seguente sistema di equazioni che sfrutta le equazioni del moto:

$$\mathbf{r}_x = r \cos(\phi) \sin(\theta) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{r}_y = r \sin(\phi) \sin(\theta) \quad (3.48)$$

$$\mathbf{r}_z = r \cos(\theta) \quad (3.49)$$

dove \mathbf{r}_x , \mathbf{r}_y e \mathbf{r}_z sono le componenti del vettore posizione espresse in coordinate fisse terrestri e r è il modulo di tale vettore; come si può facilmente notare si ha a che fare con un sistema di equazioni in cui si hanno tre equazioni e due incognite, per risolverlo si può pensare di ricavare dall'equazione (3.49) il valore della elevazione e tramite questo valore andare a ricavare il valore della longitudine.

Infine rimane da convertire il vettore campo magnetico in un riferimento geocentrico equatoriale. Questa operazione richiede una matrice di rotazione che ruoti il campo espresso in coordinate ECEF in un sistema di riferimento ECI (Earth Centered Inertial), si veda sempre appendice A.

Dinamica orbitale

Lo scopo di questo capitolo è fornire gli elementi basilari per poter affrontare lo studio della dinamica orbitale. Nello studio del moto di navicelle spaziali sono necessari vari principi elementari, come le leggi di Keplero che descrivono il moto in orbite planetarie non perturbate e le leggi di Newton che forniscono le più generali leggi fisiche che governano il moto di un pianeta.

4.1 Orbite Kepleriane

Per orbite Kepleriane si intendono orbite ideali; l'equazione del moto del satellite nel campo di forza gravitazionale della Terra si ottiene, in prima approssimazione, dall'analisi del moto dei due corpi. Per la trattazione del problema dei due corpi si fanno tre ipotesi:

- i corpi sono a simmetria sferica in modo che le masse possano considerarsi concentrate nel centro;
- non ci sono forze interne o esterne che agiscono sul sistema;
- l'unica forza agente è quella gravitazionale che agisce lungo la linea che unisce i centri dei due corpi;

Si considerino ora due corpi di massa m_1 e m_2 rispettivamente; m_2 esercita una forza d'attrazione $F_1 = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1$ su m_1 e m_1 esercita una forza d'attrazione $F_2 = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2$ su m_2 , dove \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 sono i vettori raggio che forniscono la distanza di m_1 e m_2 dall'origine, quindi, in accordo con le leggi di Newton:

$$F_1 = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4.1)$$

$$F_2 = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (4.2)$$

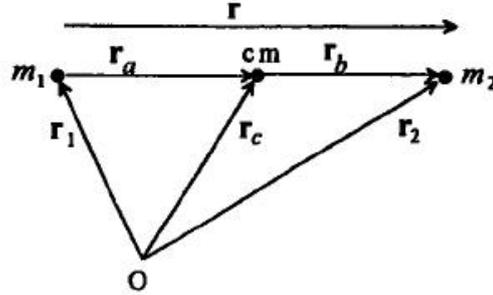


Figura 4.1: Posizionamento dei vettori in un sistema ai due corpi.

dove G è la costante gravitazionale (si veda 3.1 a pagina 11). Da (4.1) e (4.2) possiamo trovare:

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{r^3} \quad (4.3)$$

e dal momento che $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$,

$$\ddot{\mathbf{r}} + G(m_1 + m_2) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (4.4)$$

dove \mathbf{r} è il vettore di modulo r lungo la linea che collega i due corpi, vedi figura 4.1. L'equazione (4.4) è l'equazione base per un problema ai due corpi.

Supponendo ora di considerare un problema ai due corpi dove i due corpi siano rispettivamente la Terra e un satellite artificiale, si può giungere ad una versione maggiormente semplificata di (4.4) in quanto la massa di un pianeta (in questo caso la Terra) è sempre molto maggiore della massa di un satellite artificiale, quindi:

$$\ddot{\mathbf{r}} + Gm \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (4.5)$$

dove $\mu = Gm = 3.986 \times 10^5 \frac{km^3}{s^2}$ per la Terra. L'equazione del moto per un'orbita Kepleriana può essere ottenuta anche in coordinate polari, infatti:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.6)$$

dove:

- $p = \frac{h^2}{\mu}$ è una costante geometrica dell'orbita chiamata *semi-latus rectum*;
- h è il momento angolare specifico;
- e è l'eccentricità;
- θ è l'anomalia vera che verrà definita nei paragrafi successivi.

L'equazione (4.6) è l'equazione di una sezione conica; questa è l'equazione generale, da cui evolvono differenti tipi di orbite (circolare, ellittica, parabolica, iperbolica).

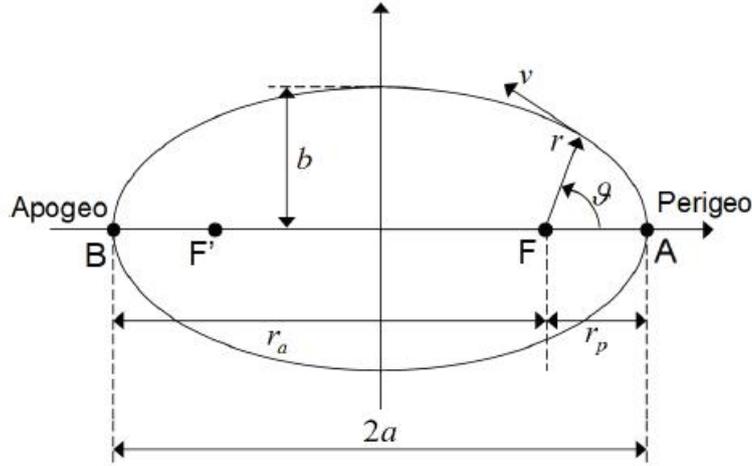


Figura 4.2: Definizione geometrica di un'orbita ellittica

4.1.1 Orbite ellittiche

Nel caso di AtmoCube si ha a che fare con un'orbita ellittica, perciò in questo paragrafo verranno definite le caratteristiche di questa tipologia di orbita. Per orbite ellittiche si intendono orbite che presentano valori di eccentricità compresi tra 0 e 1, cioè $0 < e < 1$, e un'energia pari a $E = (e^2 - 1) \frac{\mu^2}{2h^2} < 0$. Il punto sull'ellisse a $\theta = 0^\circ$ (punto A in figura 4.2) è chiamato periasse; il vettore raggio, dal primo fuoco F dell'ellisse al periasse, è il minimo vettore raggio dal fuoco a qualsiasi altro punto sull'ellisse e il suo valore è:

$$r_p = \frac{p}{1 + e} \quad (4.7)$$

Per navicelle che ruotano attorno alla terra, che è da considerarsi posta al primo fuoco F, il periasse è chiamato perigeo; r_p è la distanza del perigeo dal primo fuoco. Se $\theta = 180^\circ$ quindi si è sul punto B dell'ellisse in figura 4.2 si ha:

$$r_a = \frac{p}{1 - e} \quad (4.8)$$

Il punto B è chiamato apoasse ed è il punto sull'ellisse con la maggiore distanza dal fuoco locato in F; r_a indica il vettore raggio dell'apoasse. L'apoasse in navicelle orbitanti intorno alla Terra è chiamata apogeo. Dalle equazioni (4.7) e (4.8) si ricava:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (4.9)$$

Sull'ellisse l'asse maggiore equivale a $2a = r_a + r_p = 2p/(1 - e^2)$, quindi:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{\mu} \quad (4.10)$$

dove a sarà chiamato semi-asse maggiore.

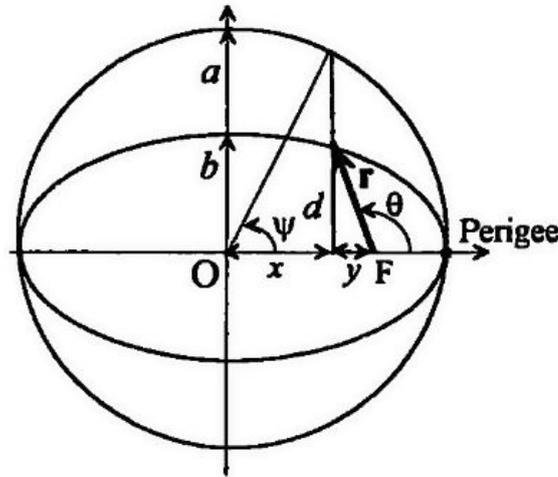


Figura 4.3: Interpretazione geometrica per ricavare anomalia vera ed eccentrica.

4.1.2 Anomalia vera ed anomalia eccentrica

La posizione angolare di un corpo lungo un'orbita può essere descritta sia in termini di deviazione angolare dall'asse maggiore sia in termini di tempo trascorso dal passaggio al perigeo. Si usi la figura 4.3 per definire l'anomalia vera e eccentrica di un'ellisse. L'anomalia vera θ è definita come l'angolo tra (i) l'asse maggiore puntato al perigeo e (ii) il vettore raggio formato dal primo fuoco F fino al corpo in movimento. Per definire l'anomalia eccentrica, si disegna un cerchio ausiliario con raggio a centrato nel punto medio dell'asse maggiore. L'anomalia eccentrica è quindi definita come in figura 4.3. Si possono ricavare alcune importanti relazioni tra anomalia vera ed eccentrica:

$$a \cos(\psi) = ae + \frac{a(1 - e^2) \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{ae + a \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \quad (4.11)$$

e

$$\cos(\psi) = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos(\theta)}, \quad \sin \psi = \frac{\sin(\theta) \sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos(\theta)}, \quad (4.12)$$

$$\cos(\theta) = \frac{\cos(\psi) - e}{1 - e \cos(\psi)}, \quad \sin \theta = \frac{\sin(\psi) \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos(\psi)}. \quad (4.13)$$

4.1.3 Orbite Kepleriane nello spazio

Per navicelle orbitanti attorno alla Terra, è una scelta comune quella di definire un sistema di coordinate inerziali con il centro di massa della terra come propria origine (un sistema geocentrico) e la cui direzione nello spazio è fissata relativamente

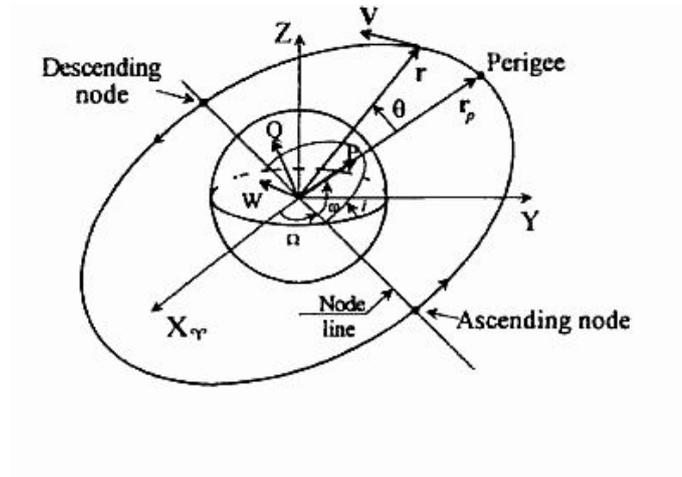


Figura 4.4: Parametri che definiscono la posizione delle orbite nello spazio.

al sistema solare. Misure astronomiche hanno mostrato come questa scelta possa essere un sistema inerziale adatto per scopi pratici. La Terra si muove in un'orbita quasi circolare intorno al sole con un lungo periodo (un anno intero), cosicchè il suo moto è praticamente non-accelerato per i nostri scopi, e il sistema di riferimento può essere accettato come inerziale o Galileiano. L'asse \mathbf{Z} è l'asse di rotazione della Terra in direzione positiva, che interseca la sfera celeste al *polo celeste*. Come piano $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$ di questo sistema di coordinate è preso il piano equatoriale della terra, che è perpendicolare all'asse di rotazione della Terra. La direzione dell'asse di rotazione della terra relativo al sistema inerziale stellare non è costante, dal momento che è perturbato da forze dovute al Sole e alla Luna. Le conseguenze sono un moto precessionale dovuto al Sole (con un periodo di 25800 anni e un ampiezza di $23,5^\circ$), insieme ad un moto nutazionale periodico dovuto alla Luna (con un periodo di 18,6 anni e un ampiezza di $9''21$).

Com'è ben noto, il piano equatoriale terrestre è inclinato rispetto al piano dell'eclittica, che è il piano dell'orbita terrestre intorno al sole, con un angolo di $23,5^\circ$ (vedi figura 4.5). I piani si intersecano lungo una linea che è quasi inerziale nello spazio, rispetto alle stelle. L'asse \mathbf{X} del sistema inerziale coincide con questa linea, chiamata vettore dell'equinozio di Primavera e che interseca la sfera celeste in un punto chiamato punto vernale. Il terzo asse \mathbf{Y} completa un sistema ortogonale destrorso.

Dopo aver definito il sistema di coordinate geocentrico, si possono ora discutere i tre parametri aggiuntivi necessari per posizionare un'orbita nello spazio. Nella figura 4.4 il piano dell'orbita è inclinato rispetto al piano $\mathbf{X}-\mathbf{Y}$, che è anche il piano equatoriale della Terra, di un angolo i , l'inclinazione dell'orbita. Il piano orbitale e il piano equatoriale si intersecano formando la "cosiddetta "node line". L'angolo nel piano equatoriale che separa la node line dall'asse \mathbf{X} viene chiamato ascensione retta, Ω . Nel piano orbitale \mathbf{r} è il vettore raggio del corpo in movimento e \mathbf{r}_p è il vettore raggio al perigeo dell'orbita. L'angolo tra \mathbf{r}_p e la node line è ω ,

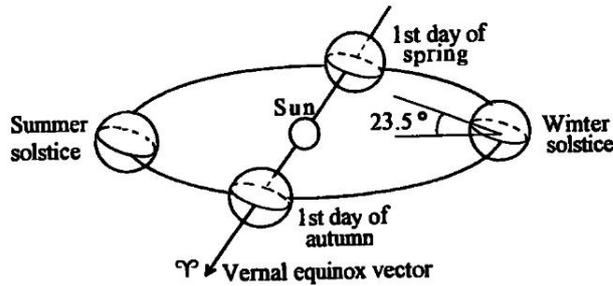


Figura 4.5: Direzione dell'equinozio di primavera.

noto come argomento del perigeo. Questi tre, insieme ad altri tre parametri (a, e e M) dell'orbita completano un sistema di sei parametri che sono sufficienti a definire la posizione nello spazio di un corpo in movimento in qualsiasi orbita Kepleriana. Questi parametri sono noti come i parametri orbitali classici, che possono essere ridefiniti come segue:

1. a , il semi-asse maggiore;
2. e , l'eccentricità;
3. i , l'inclinazione;
4. Ω , l'ascensione retta del nodo ascendente;
5. ω , l'argomento del perigeo;
6. $M = n(t - t_0)$, l'anomalia media (dove n è il moto medio ed è pari: $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$);

Conviene definire un vettore $[\alpha] = [a \ e \ i \ \Omega \ \omega \ M]^T$. Sebbene i parametri classici definiscano completamente un'orbita nello spazio, alcuni di essi, come ad esempio Ω , sono scarsamente definiti se l'inclinazione i è molto piccola, come per orbite geostazionarie: in tali casi è preferibile utilizzare una variazione dei sei parametri.

4.1.4 Trasformazioni tra sistemi a coordinate Cartesiane

I sei parametri orbitali sono convenienti per definire un'orbita nello spazio tramite il sistema inerziale definito nella sezione 4.1.3, tuttavia può essere utile esprimere la posizione di un corpo nello spazio attraverso altri parametri, come quelli Cartesiani o Polari. In figura 4.6, \mathbf{R} è il vettore raggio di un punto relativo all'origine di entrambi i sistemi Cartesiani $[\mathbf{I}, \mathbf{J}]$ e $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$. Il sistema $[\mathbf{i}, \mathbf{j}]$ è ruotato di un angolo Ω rispetto al sistema $[\mathbf{I}, \mathbf{J}]$; le componenti di \mathbf{R} sono rispettivamente X, Y e x, y in entrambi i sistemi. Ora, si consideri \mathbf{I}, \mathbf{J} come vettori unitari in $[X, Y]$ e \mathbf{i}, \mathbf{j} vettori unitari in $[x, y]$. Se si vuole compiere una trasformazione nello spazio:

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (4.14)$$

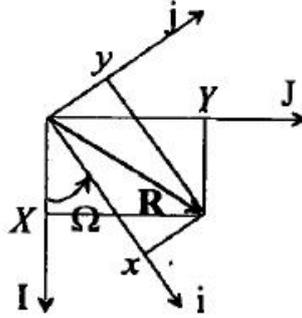


Figura 4.6: Trasformazione di coordinate bi-dimensionali.

Prendendo il prodotto scalare del vettore \mathbf{R} e il vettore unitario \mathbf{i} , si ha:

$$X\mathbf{I} \cdot \mathbf{i} + Y\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} = x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} \quad (4.15)$$

Dal momento che $\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = \cos \Omega$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{i} = \sin \Omega$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ e $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ segue che $x = X \cos \Omega + Y \sin \Omega$. Similarmente, considerando il prodotto scalare di \mathbf{R} con \mathbf{j} si ottiene:

$$X\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} + Y\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} = x\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \quad (4.16)$$

Anche in questo caso si può ottenere $\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} = -\sin \Omega$, $\mathbf{J} \cdot \mathbf{j} = \cos \Omega$, $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ e $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$, quindi si ha che $y = X[-\sin \Omega] + Y \cos \Omega$. Ora, si prenda un asse \mathbf{K} , che sarà l'asse dove si vuole ottenere la rotazione, perpendicolare a entrambi gli assi \mathbf{I} e \mathbf{J} ; guardando questa trasformazione come una trasformazione tridimensionale nello spazio con l'asse Z lungo l'asse \mathbf{K} e z lungo l'asse \mathbf{k} , si ha $Z=z$. Infine si ha:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Per ottenere una trasformazione su diversi sistemi di riferimento, nello spazio, tale trasformazione deve essere utilizzata tante volte quanto è necessario. Per semplicità si definisce questa trasformazione come $[\mathbf{r}] = [A(\Omega)][\mathbf{R}]$.

Per esempio, si supponga di dover passare da coordinate inerziali a coordinate orbitali, cioè passare dagli assi \mathbf{X} , \mathbf{Y} , \mathbf{Z} agli assi \mathbf{P} , \mathbf{Q} e \mathbf{W} di figura 4.4 (\mathbf{P} è il vettore unitario diretto dal centro dell'orbita verso il perigeo, \mathbf{W} è il vettore unitario lungo l'asse dei momenti dell'orbita, $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, e $\mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{W}$). La trasformazione procede come segue:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

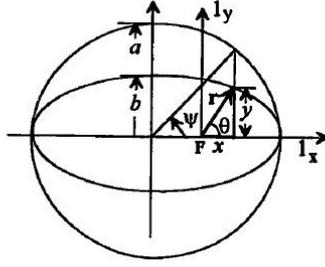


Figura 4.7: Trasformazione da parametri orbitali a coordinate Cartesiane.

Per brevità di notazione l'equazione (4.18) diventa:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \\ W \end{bmatrix} = [A_z(\omega)] [A_x(i)] [A_z(\Omega)] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

4.1.5 Trasformazione da $[\alpha]$ a $[v, r]$

Il problema che ci si pone ora è quello di trovare le coordinate Cartesiane di un satellite posto in un sistema di riferimento inerziale (mostrato in figura 4.4) dato dai sei parametri orbitali a, e, i, Ω, ω e M . Si può definire un sistema di coordinate x, y in un piano con $z=0$, come si può vedere dalla figura 4.7. Sempre da questa figura si ha:

$$x = a \cos(\psi) - c = a \cos(\psi) - ae \quad (4.20)$$

$$y = \frac{[b \sin(\psi)a]}{a} = a \sin(\psi) \sqrt{1 - e^2} \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

dove $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y$. Inoltre, per un'orbita planare, $z=0$.

Per trovare r e $e \, dr/dt$, si ponga $\hat{\mathbf{i}} \equiv \mathbf{P}$ e $\hat{\mathbf{j}} \equiv \mathbf{Q}$, allora:

$$\mathbf{r} = a[\cos(\psi) - e]\mathbf{P} + a\sqrt{1 - e^2} \sin(\psi)\mathbf{Q} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = x\mathbf{P} + y\mathbf{Q} \quad (4.23)$$

Quindi supponendo ora di volerci riferire ad un sistema di coordinate X, Y, Z inerziale, si deve usare la trasformazione inversa, vista nell'equazione (4.18), cioè:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [A_z(\Omega)]^{-1} [A_x(i)]^{-1} [A_z(\omega)]^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Per il calcolo della velocità si parte da:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \quad (4.25)$$

Considerando che il termine $d\psi/dt$ è ricavabile dall'equazione di Keplero:

$$\frac{dM}{dt} = n = \frac{d\psi}{dt} - e \cos(\psi) \frac{d\psi}{dt} \quad (4.26)$$

da cui si può derivare:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{n}{1 - e \cos(\psi)} = \frac{an}{r} \quad (4.27)$$

Da cui, differenziando l'equazione (4.23) si può ottenere:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{a^2 n}{r} [-\sin(\psi)\mathbf{P} + \sqrt{1 - e^2} \cos(\psi)\mathbf{Q}] \quad (4.28)$$

Si è quindi trovata la velocità; conoscendo le componenti di \mathbf{v} lungo gli assi \mathbf{P} e \mathbf{Q} , si può usare una volta ancora la trasformazione vista nell'equazione (4.18) per trovare le componenti della velocità in un sistema di riferimento inerziale. Anche in questo caso si deve utilizzare una trasformazione inversa, che è simile a quella di equazione (4.24).

Dinamica d'assetto

Si definisce corpo rigido un sistema di punti materiali soggetti a vincoli olonomi tali da mantenere costante durante il moto la distanza fra ogni coppia di punti. Quantunque sia solo un'astrazione, questo concetto è molto utile e in questo capitolo si studierà principalmente la cinematica dei corpi rigidi e cioè, la natura e le caratteristiche del loro movimento. Una volta visto come descrivere il moto di un corpo rigido, si discuterà in che modo tale movimento dipenda dalle forze applicate e dai loro momenti.

5.1 Momento della quantità di moto di un corpo rigido

Si comincerà definendo le grandezze fisiche che interessano e che verranno usate per descrivere la fisica del problema: il momento della quantità di moto (momento angolare) riferito ad un sistema di riferimento solidale con il corpo rigido (vedi figura 5.1), la cui origine O (punto stazionario) coincide con quella del sistema di riferimento inerziale xyz , è dato da:

$$d\vec{L}_B = \vec{r}' \times \vec{v} dm \quad (5.1)$$

Per tutto il corpo rigido si ha:

$$\vec{L}_B = \int_B \vec{r}' \times \vec{v} dm \quad (5.2)$$

La velocità assume la forma:

$$\vec{v} = \vec{\omega}_{BI} \times \vec{r}' \quad (5.3)$$

dove $\vec{\omega}_{BI}$ è la velocità angolare del corpo rigido rispetto al sistema di riferimento inerziale xyz .

Risolvendo l'integrale si ricava:

$$\vec{L}_B = \int_B \vec{r}' \times (\vec{\omega}_{BI} \times \vec{r}') dm \quad (5.4)$$

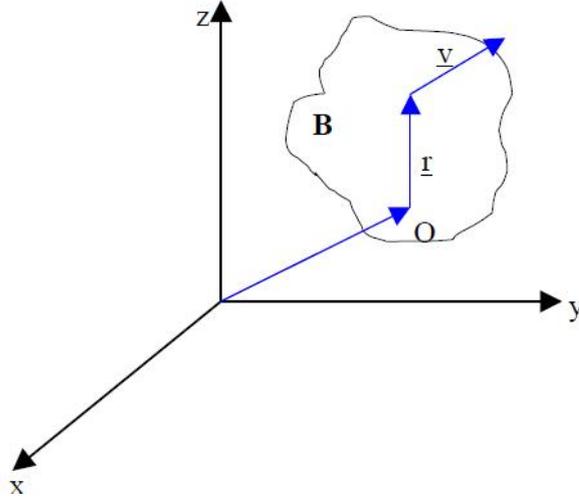


Figura 5.1: Sistema di riferimento per il corpo rigido

Per procedere oltre si devono prima di tutto svolgere i prodotti vettore, si ponga:

$$\vec{\omega}_{BI} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

e

$$\vec{r}' = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Risolvendo i prodotti vettoriali si ha che:

$$\vec{r}' \times (\vec{\omega}_{BI} \times \vec{r}') = \begin{pmatrix} \omega_x y^2 - \omega_y xy + \omega_x z^2 - \omega_z xz \\ \omega_y z^2 - \omega_z yz + \omega_y x^2 - \omega_x xy \\ \omega_z x^2 - \omega_x xz + \omega_z y^2 - \omega_y yz \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Definendo la matrice di inerzia :

$$I_B = \begin{bmatrix} I_{xx} = \int_B (y^2 + z^2) dm & I_{xy} = - \int_B xy dm & I_{xz} = - \int_B xz dm \\ I_{yx} = \int_B yz dm & I_{yy} = - \int_B (x^2 + y^2) dm & I_{yz} = - \int_B yz dm \\ I_{zx} = - \int_B zx dm & I_{zy} = - \int_B zy dm & I_{zz} = - \int_B (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Considerando che i termini dell'equazione (5.4) possono essere riscritti in termini del momento statico, che è una misura di quanto il polo di riferimento sia distante dal centro di massa, si giunge a:

$$\vec{L}_B = I_B \vec{\omega}_{BI} \quad (5.9)$$

Si ricordi ora l'equazione fondamentale che lega momento angolare e momento delle forze esterne, cioè:

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \vec{T}_{ext,I} \quad (5.10)$$

dove il pedice I sta ad indicare il sistema di riferimento inerziale xyz. In assi corpo si è visto che:

$$d\vec{L}_B = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

La derivata temporale di \vec{L}_B può essere scritta come:

$$\frac{d\vec{L}_B}{dt} + \vec{\omega}_{BI} \times \vec{L}_B = \vec{T}_{ext,B} \quad (5.12)$$

che sviluppandolo porta ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine non lineari fortemente accoppiate:

$$I\dot{\omega} = -\omega \times I\omega + T_{mag} + T_d \quad (5.13)$$

dove:

- $\omega \in \mathfrak{R}^3$ è il vettore delle velocità angolari espresse nel riferimento corpo;
- $I \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ è la matrice di inerzia;
- $T_{mag} \in \mathfrak{R}^3$ è il vettore delle coppie di controllo magnetiche;
- $T_d \in \mathfrak{R}^3$ è il vettore delle coppie di disturbo esterne;

5.2 Parametrizzazione d'assetto

Come si è visto nel paragrafo 5.1 si sono ricavate le equazioni che descrivono la dinamica per un corpo in volo; queste equazioni risultano essere decisamente accoppiate e di complicata risoluzione analitica. Per questo si fa uso di termini che permettano di considerare una parametrizzazione dell'assetto in modo tale da superare il forte accoppiamento delle equazioni in termini di velocità angolare (equazione (5.13)).

Una delle parametrizzazioni più utilizzate per le navicelle è ottenuta dai quattro parametri di Eulero, che conducono alla seguente rappresentazione per l'assetto:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}W(\omega)q \quad (5.14)$$

dove $q \in \mathfrak{R}^4$ è il vettore a norma unitaria dei parametri di Eulero, noto con il nome di quaternione (per una spiegazione dei quaternioni si veda l'appendice B), e

$$W(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Equazioni del moto perturbate

Sino a questo punto si sono considerate solamente orbite ideali, utilizzando le orbite Kepleriane; per assolvere allo scopo di predire con sufficiente accuratezza l'orbita che la navicella effettuerà, si devono tenere in conto diverse tipologie di perturbazione:

- **Triassialità della terra.** Nella derivazione dell'equazioni del moto (paragrafo 4.1) per orbite imperturbate si era assunto che la Terra fosse sferica ed omogenea. In realtà la Terra non è nè sferica nè omogenea; le deviazioni più importanti sono dovute alla rotazione terrestre: in questo caso infatti si ha un rigonfiamento equatoriale e un appiattimento ai poli che producono un raggio polare 21 Km più corto rispetto al raggio medio equatoriale, questa asfericità causa uno slittamento della "node line" che ammonta a qualche grado al giorno. La Terra inoltre presenta una leggera forma a pera, dovuta al fatto di avere il proprio centro di massa a SUD dell'equatore, ed inoltre una recente scoperta della fisica ha fatto sì che si notasse che il raggio equatoriale presenta delle variazioni, che producono asimmetria nel piano equatoriale ($\Delta r_{eq} \approx 70$ m). Questi ultimi due effetti sono meno importanti rispetto al primo, ma sono sufficienti ad influenzare un satellite in un'orbita equatoriale (vedi figura 6.1)
- **Problema dei tre corpi.** Un'altra perturbazione significativa al moto di un satellite sorge dall'attrazione gravitazionale esercitata dal Sole e dalla Luna. Per satelliti geostazionari queste perturbazioni sono dello stesso ordine di quelle che sorgono dal fatto che la terra è oblatata, mentre può essere completamente trascurato nel caso di satelliti a medio-bassa altitudine.
- **Disturbi aerodinamici.** Il moto di un satellite con un altitudine di diverse centinaia di chilometri sopra la Terra è affetta da forze aerodinamiche prodotte come conseguenza dell'interazione della navicella con l'atmosfera del pianeta. Questa resistenza (drag) aerodinamica riduce l'energia cinetica e il momento angolare dell'orbita e conduce ad un lento decrescere del semi-asse maggiore e dell'eccentricità. L'effetto è quindi quello di una circolarizzazione dell'orbita

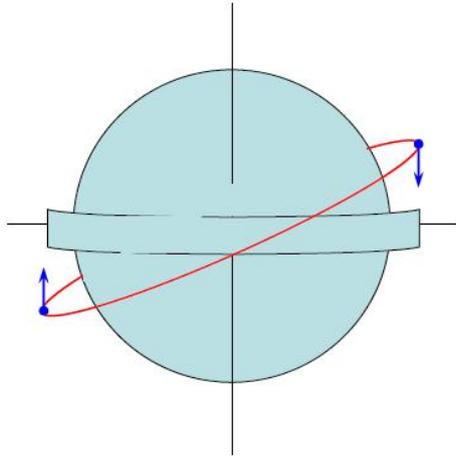


Figura 6.1: Per dare un'idea visiva dell'effetto si rappresenta la Terra come una sfera circondata da una fascia equatoriale di materia in eccesso che rappresenta il rigonfiamento all'equatore.

e una perdita di altitudine che può porre limiti severi al tempo di vita del satellite.

- **Disturbi da gradiente di gravità.** Le navicelle spaziali non sono corpi con massa puntiforme, ma sono caratterizzate da una distribuzione di massa che è continua, tipicamente una funzione anisotropica dello spazio. Perciò il campo gravitazionale del pianeta esercita sulla navicella un sistema di forze distribuite il cui effetto è equivalente ad una forza (gravità, in realtà) applicata al centro di massa del corpo e una coppia dipendente dall'assetto del corpo.
- **Pressione solare.** Perturbazioni significative, specialmente per satelliti dotati di pannelli solari molto estesi, possono risultare quelle relative alla pressione della radiazione solare, che sorgono quando fotoni di luce urtano sulla superficie della navicella e vengono susseguentemente riflessi o assorbiti, trasferendo il loro impulso al satellite. Questo effetto è usualmente molto piccolo, ma può diventare considerevole durante tempeste solari o tra condizioni di eclisse e illuminazione
- **Altre perturbazioni.** Perturbazioni minori sono dovute a variazioni di massa, effetti relativistici, pressione da radiazioni della Terra ed altri: tuttavia tutti questi effetti producono un effetto che è di diversi ordini di grandezza minore rispetto, ad esempio, ai fenomeni aerodinamici che incontrerà nella sua missione AtmoCube. Perciò una modellizzazione di tali disturbi non è stata presa in considerazione perchè può essere fatta solo per missioni che richiedono un altissimo livello di accuratezza orbitale.

Nel restante capitolo verranno presentati, quindi, i modelli per i disturbi più rilevanti a cui sarà soggetto il CubeSat.

6.1 Disturbi dovuti alla non-sfericità della Terra

Il paragrafo 3.1 ha esplicitato come si possa dare una formalizzazione del campo gravitazionale terrestre e si è inoltre visto che il potenziale vale:

$$U_g(r, \phi, \lambda) = \frac{GM}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \phi) + \right. \quad (6.1)$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^n P_{nm}(\sin \phi) (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) \right\} \quad (6.2)$$

Il potenziale generato dalla non sfericità della Terra produce variazioni periodiche in tutti gli elementi orbitali; tuttavia gli effetti dominanti sono variazioni secolari su:

- ascensione retta del nodo ascendente;
- argomento del perigeo;
- anomalia media

Nel primo caso il piano orbitale ruota attorno l'asse terrestre in direzione opposta al moto del satellite; il rigonfiamento dell'equatore produce la forza aggiuntiva dovuta all'aumento di attrazione gravitazionale. Lo spostamento è una specie di effetto giroscopico; il cambio di direzione del moto è perpendicolare sia alla direzione originale del moto che alla direzione della forza perturbante: questo fenomeno si chiama regressione dei nodi. Si può notare come i nodi si muovano verso OVEST per orbite progressive e verso EST per orbite retrograde. Le variazioni sugli elementi orbitali più colpiti possono essere quantificate in questo modo:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n J_2 \cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \quad (6.3)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3n J_2 [1 - 5 \cos^2(i)]}{4(1-e^2)^2} \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \quad (6.4)$$

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{3n J_2 [3 \cos^2(i) - 1]}{4(1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{R_{eq}}{a} \right)^2 \quad (6.5)$$

dove J_2 è un coefficiente zonale di ordine 0 e vale $1,082 \times 10^{-6}$.

6.2 Disturbi dovuti a forze esterne

Le nature di questi disturbi sono molteplici e dipendono da svariati fattori, come ad esempio l'altitudine della navicella o l'inclinazione rispetto al piano equatoriale. L'equazione 4.5 a pagina 22, in presenza di forze esterne è riscrivibile come:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \mathbf{f} \quad (6.6)$$

Dove \mathbf{f} rappresenta il vettore delle forze esterne. In questo caso il piano dell'orbita non è più fisso ma varia nel tempo; istante per istante l'orbita su cui si muove il satellite coincide con un'orbita di riferimento lungo cui un satellite si muoverebbe se a quell'istante si annullassero tutte le accelerazioni che perturbano il moto: tale orbita di riferimento si dice *osculante*. Osculare è il termine scientifico per baciare; il termine dà il senso del contatto, nel nostro caso il contatto avviene tra l'orbita vera (perturbata) e quella di riferimento o osculante. Si noti che i vettori posizione e velocità del satellite sono gli stessi nell'orbita osculante, quello che varia è $\ddot{\mathbf{r}}$. Dopo un tempo δt , il satellite giace su una nuova orbita osculante data dal vettore posizione $\mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \delta t$ e dal vettore velocità $\dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \delta t$. Poichè $\ddot{\mathbf{r}}$ ha un valore diverso da quello dell'orbita non perturbata, gli elementi dell'orbita osculante al tempo $t + \delta t$ saranno diversi da quelli al tempo t . Si esprime il cambio di elementi orbitali in termini di $\mathbf{f}(f_r, f_t, f_n)$, con f_r forza radiale, f_t forza tangenziale e f_n forza normale.

6.2.1 Disturbi dovuti a forze aerodinamiche

Le forze aerodinamiche sono largamente le perturbazioni che incidono maggiormente su un satellite orbitante a basse altitudini dalla Terra. Costruire un modello di queste forze non è un processo semplice per tre principali ragioni:

- Le proprietà fisiche dell'atmosfera superiore non sono ben conosciute.
- Non è disponibile un'accurata conoscenza dei gas neutri, come quelli che interagiscono con la geometria del satellite.
- Si deve tenere in debito conto l'assetto del satellite relativamente al flusso di particelle che lo investe.

La forza dominante agente su satelliti a basse altitudini è il drag aerodinamico, che ha direzione opposta rispetto al moto del satellite. Contributi minori, che possono essere trascurati, sono diretti verso l'alto e in direzione binormale e prendono il nome di lift aerodinamico e di forze binormali.

La forza impartita ad una navicella di geometria assegnata da un flusso aerodinamico impetuoso ad una data altitudine orbitale è governata dalla legge dei momenti scambiati. Si consideri un elemento di massa infinitesimale dm che colpisce l'area trasversale del satellite ad in un certo intervallo di tempo dt . Il satellite, fluendo

oltre, subirà una variazione di momento proporzionale al momento che possedeva il satellite, in accordo con:

$$\Delta p \propto (dmv_r) = \rho A v_r^2 dt \quad (6.7)$$

dove v_r è la velocità relativa, A è la sezione trasversale del satellite e ρ è la densità atmosferica in un certo punto. Il drag sarà perciò ricavabile come:

$$D = -\frac{1}{2} \frac{\rho v_r^2 A C_d e_v}{m} \quad (6.8)$$

dove C_d è un coefficiente di proporzionalità riferito all'area nominale trasversale del satellite A , m la massa del satellite e e_v è il vettore unitario diretto come la velocità $v_r = v - \omega_{\otimes} r_{\perp}$ della navicella relativamente all'atmosfera; ω_{\otimes} è la variazione della rotazione terrestre, considerato che $r_{\perp} = (\omega_{\otimes} \times r) \times \omega_{\otimes}$. Il coefficiente C_d è un coefficiente adimensionale che descrive l'interazione tra geometria del satellite e flusso aerodinamico e nel caso di AtmoCube vale ≈ 2.2 . E' possibile ora ricavare il modulo della forza aerodinamica applicata su una navicella, partendo dalla conoscenza del drag, infatti:

$$F_a = Dm = \frac{1}{2} \rho C_d A v_r^2 \quad (6.9)$$

Tuttavia la forza aerodinamica applicata su una navicella è fortemente dipendente dall'assetto, quindi dalla matrice dei coseni direttori (si veda appendice A), perciò la forza aerodinamica espressa lungo i tre assi corpo della navicella è esprimibile come:

$$\begin{bmatrix} F_{ax} \\ F_{ay} \\ F_{az} \end{bmatrix} = \frac{1}{|v|} \cdot F_a \cdot A \cdot v_{ECI} \quad (6.10)$$

dove $|v|$ rappresenta il modulo del vettore velocità calcolato in coordinate ECI, v_{ECI} , e A è la matrice dei coseni direttori.

Supponendo il disturbo interamente diretto lungo l'asse x è possibile calcolare la coppia aerodinamica agente su una navicella attraverso la relazione:

$$T_a = \begin{bmatrix} 0 \\ F_{ay}(c_{pa} - c_g) \\ F_{az}(c_{pa} - c_g) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

dove:

- c_{pa} è il centro di pressione aerodinamica, cioè il punto del cubo in cui è applicata la pressione dovuta alla forza aerodinamica, prendendo come riferimento gli assi corpo del cubo, nel nostro caso pari a 0.07 m;
- c_g è il centro di gravità, preso come il centro di massa del cubo, nel nostro caso pari a 0.05 m.

6.2.2 Disurbi dovuti a gradiente di gravità

Questo termine è il risultato dell'attrazione differenziale esercitata su qualsiasi elemento di massa infinitesima che costituisce il corpo; le coppie da gradiente di gravità possono essere espresse in funzione dell'assetto tramite i coseni direttori della verticale locale rispetto al sistema assi corpo mediante la seguente espressione:

$$T_g = \begin{bmatrix} T_{gx} \\ T_{gy} \\ T_{gz} \end{bmatrix} = \left(\frac{3\mu}{(R_{eq} + r_B)^3} \right) \begin{bmatrix} (I_{zz} - I_{yy})c_2c_3 \\ (I_{xx} - I_{zz})c_1c_3 \\ (I_{yy} - I_{xx})c_1c_2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

dove μ indica, come già detto, la costante gravitazionale terrestre, R_{eq} è il raggio medio terrestre e r è la distanza della navicella dal centro della Terra ed infine c_1 , c_2 e c_3 sono i coseni direttori espressi in funzione del quaternion (vedi appendice B) e valgono rispettivamente:

$$c_1 = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 \quad (6.13)$$

$$c_2 = 2(q_1q_2 - q_3q_4) \quad (6.14)$$

$$c_3 = 2(q_1q_3 + q_2q_4) \quad (6.15)$$

6.2.3 Equazioni del moto perturbate

Il problema dei due corpi in assenza di perturbazioni esterne, descrive il moto di un punto soggetto alla forza di gravità esercitata da un corpo centrale; questa è la formulazione matematica più semplice per il problema di Keplero, fornito originalmente da Newton, e può essere ottenuta come la soluzione dell'equazione differenziale (4.1 a pagina 21), una volta specificate le condizioni iniziali (ad esempio posizione e velocità). Nonostante ciò, nel proprio tentativo di predire il moto dei pianeti e della Luna, Keplero concepì una formulazione differente delle equazioni orbitali, basate su un'interpretazione geometrica.

L'effetto dell'interazione aerodinamica con l'atmosfera di un pianeta ha principalmente due effetti:

- produce un decadimento dell'orbita;
- produce una circolarizzazione dell'orbita;

Le equazioni del moto perturbate si possono ricavare esprimendo il cambio di elementi orbitali in termini di $\mathbf{f}(f_r, f_t, f_n)$, dove:

- f_r è la componente radiale della forza esterna;
- f_t è la componente tangenziale della forza esterna;
- f_n è la componente normale della forza esterna;

Si ha quindi che la prima equazione delle orbite perturbate è:

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{\sqrt{\mu p}} [f_r e \sin \theta + f_t (1 + e \cos \theta)] \quad (6.16)$$

Altre due equazioni si ottengono dal momento angolare specifico, risulta:

$$\dot{\Omega} \sin i = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \sin(\omega + \theta) \quad (6.17)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} r f_n \cos(\omega + \theta) \quad (6.18)$$

Derivando ora l'equazione del moto in termini di anomalia eccentrica si deriva la quarta equazione delle orbite perturbate:

$$\dot{e} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} [f_r \sin \theta + f_t (\cos \theta + \cos \psi)] \quad (6.19)$$

Le forze aerodinamiche hanno come risultato una componente che si oppone al moto del satellite, comunemente chiamato drag aerodinamico. Essendo una funzione della densità atmosferica, che, nel caso in esame, è di dimensioni rilevanti, il drag mostra un comportamento ciclico e varia drammaticamente durante il moto della navicella lungo l'orbita. Più bassa è l'altitudine geodetica, più intenso è il drag, che raggiunge il suo picco massimo al periasse dell'orbita. Due differenti contributi concorrono a questo decadimento orbitale: il primo giunge come diretta conseguenza del drag aerodinamico, mentre il secondo è una conseguenza indiretta e deriva dalla circolarizzazione dell'orbita. Questa causa indiretta può essere facilmente tenuta in conto, infatti una volta che sono note l'eccentricità iniziale e attuale, la variazione della distanza al perigeo può essere ottenuta come:

$$\frac{r_a(t_0)}{r_a(t)} = \frac{1 - e(t)}{1 - e(t_0)} \quad (6.20)$$

Da cui deriva che il contributo dovuto alla circolarizzazione è dato da:

$$\Delta h_a = r_a(t_0) - r_a(t) = \left(\frac{e(t_0) - e(t)}{1 - e(t)} \right) r_a(t_0) \quad (6.21)$$

Controllo d'assetto con attuatori magnetici: generalità e progetto per AtmoCube

Lo scopo di questo capitolo è giungere alla progettazione di un controllo d'assetto del satellite AtmoCube, in modo tale da mantenere il suo orientamento sovrapposto a quello orbitale. Per ottenere questo risultato si possono attuare diverse leggi di controllo che agiscono in maniera diversa; tuttavia nel caso particolare di AtmoCube si deve tenere in conto delle necessità e delle limitazioni dovute alle dimensioni ridotte della navicella.

Le leggi di controllo attuabili su una qualsiasi navicella dipendono in maniera diretta dagli attuatori disposti a bordo di essa; la scelta degli attuatori, trattandosi di un progetto il cui studio procede da qualche anno, è una scelta già effettuata ed è caduta sui Magnetic Torquer che sono delle bobine che vengono alimentate e generano una coppia; conoscendo ciò, la variabile di controllo sarà quindi la coppia magnetica generata da questi attuatori che andrà a compensare gli effetti a cui sarà soggetto il satellite e che non permettono l'allineamento con il piano orbitale.

7.1 Attuatori di controllo

I Magnetic Torque consistono in bobine piane di filo uniforme (tipicamente rame) rigidamente poste sugli assi corpo del satellite; quando una tensione è applicata ai capi della bobina, una corrente $i(t)$ si crea, generando quindi un momento di dipolo magnetico $m(t)$. Il momento di dipolo magnetico è la misura dell'intensità della sorgente magnetica. Nel più semplice dei casi di un semplice loop di corrente, intensità e direzione del dipolo è dettata da:

$$m(t) = \oint_A i(t) dA = NA|i(t)|\hat{n} \quad (7.1)$$

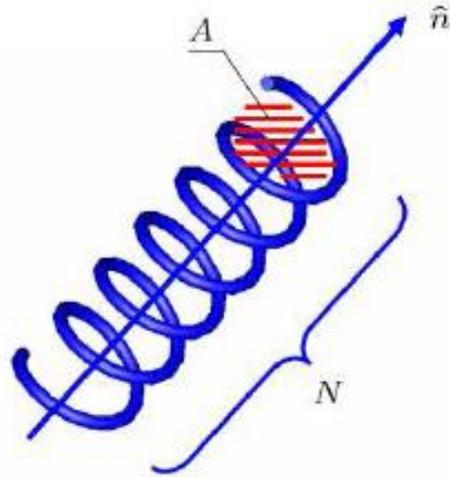


Figura 7.1: Momento di dipolo magnetico generato da una corrente che fluisce attraverso una spira

dove $i(t)$ descrive l'ammontare (e la direzione) della corrente che fluisce lungo la bobina, N è il numero di spire, A è l'area totale occupata dalla bobina e \hat{n} è definita in accordo con la figura 7.1.

L'interazione con il campo magnetico terrestre fa sì che la bobina tenti di allinearsi con il proprio campo magnetico nella direzione del campo magnetico terrestre. La generazione di coppia può essere facilmente spiegata, facendo riferimento alla legge di Lorentz. Su qualsiasi filo di lunghezza infinitesima dl , una forza infinitesima dF è applicata in accordo con:

$$dF = (dqv) \times b = (idl) \times b \quad (7.2)$$

Seguendo ora la regola del prodotto scalare, una coppia T_{mag} è generata sulla spira, la quale allinea il momento magnetico di dipolo al campo magnetico esterno.

Di conseguenza, la coppia magnetica T_{mag} prodotta dal Magneto Torquer (e perciò dalla navicella, a cui è rigidamente attaccata) può essere descritta come:

$$T_{mag}(t) = NA|i(t)|\hat{n} \times b(t) = m(t) \times b(t) = S(b(t))m(t) \quad (7.3)$$

dove $b(t)$ è il vettore del campo magnetico terrestre e $S(b(t))$ è definita come:

$$S(b(t)) = \begin{bmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Il momento di dipolo magnetico m può essere effettivamente considerato come variabile di controllo per il processo di generazione della coppia magnetica, o in alternativa

la corrente che fluisce nelle spire, o la tensione applicata ai capi della bobina. Inoltre, l'equazione (7.3) mostra chiaramente dove stia la principale difficoltà concernente il progetto di una legge di controllo d'assetto magnetico: le coppie elettromagnetiche sono soggette a dei vincoli di ortogonalità rispetto alla direzione locale del vettore del campo magnetico terrestre. Tuttavia grazie alla variabilità del campo magnetico terrestre lungo l'orbita, un controllo su tre assi dell'assetto è consistente per un largo range di altitudini e inclinazioni orbitali a dispetto di questi vincoli. L'adozione di attuatori elettromagnetici implica che si deve trattare con modelli tempo-varianti nel processo di progettazione del controllo.

I Magneto Torquer vengono utilizzate molto assiduamente per satelliti a basse orbite (Low Earth Orbiting) per il loro ridotto peso (vanno da 0.1 a 1 kg), per il fatto non trascurabile che non hanno bisogno di combustibile per funzionare e sono facilmente controllabili. Tuttavia presentano diversi svantaggi, quali:

- necessitano di un magnetometro a bordo a causa della variabilità del campo magnetico;
- producono delle coppie di una certa rilevanza (circa 10^{-6} Nm) solo con navicelle aventi basse orbite;
- possono interferire con la strumentazione a bordo;
- non forniscono coppia nella direzione del campo magnetico;
- consumano energia elettrica;

7.2 Magnetometro

Per ottenere un'accurata definizione del modello si deve tenere in debito conto la strumentazione di misura che si possiede a bordo della navicella. Nel caso di Atmo-Cube l'unico sensore adottato è un magnetometro, le cui caratteristiche sono definite nell'appendice C, di cui è necessario fornire una modellizzazione.

Il magnetometro posto a bordo del satellite è un magnetometro triassiale, con gli assi coincidenti a quelli d'inerzia, così da poter catturare completamente il vettore del campo magnetico ed è caratterizzato da un'elevata risoluzione e da una grande affidabilità. Considerando B_{ECI} il campo magnetico misurato nel sistema di riferimento ECI (vedi appendice A) e sia A la matrice dei coseni direttori, allora il campo magnetico misurato da un magnetometro è dato da:

$$B_m(t) = A(t)B_{ECI}(t) \quad (7.5)$$

in cui la matrice $A(t)$, per come è stata definita, permette di passare dal sistema di coordinate ECI alle coordinate corpo.

Tuttavia questa trattazione non è ancora completa, in quanto non tiene in conto del rumore a cui è soggetto il sensore; per fare ciò si introduce un errore distribuito

come un rumore bianco, $\nu(t)$, con matrice di covarianza nota; quindi l'equazione (7.5) diventa:

$$B_m(t) = A(t)B_{ECI}(t) + \nu(t) \quad (7.6)$$

dove nelle simulazioni che si effettueranno il rumore bianco è posto a $E(\nu(t)\nu(t)^T) = 2 \cdot 10^{-9}$ T.

7.3 Dinamica linearizzata

In questo paragrafo si vuole condurre lo studio della dinamica linearizzata delle equazioni del moto 5.13 a pagina 33.

Entrando nel dettaglio il modello non lineare della navicella è dato da:

$$\dot{x} = F(x(t), u(t)) = \quad (7.7)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}W(\omega_{BR}q_{BR}) \\ I^{-1}(S(\omega_{BI})I\omega_{BI} + T_d + T_{mag}) \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

dove il vettore di stato è:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_{BR}^T(t) \\ \omega_{BI}^T(t) \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

e:

- ω_{BI} è la velocità angolare del corpo rispetto al sistema di riferimento inerziale;
- ω_{BR} è la velocità angolare del corpo rispetto al sistema di riferimento orbitale;
- q_{BR} è il vettore dei quaternioni calcolati in assi corpo rispetto al sistema di riferimento orbitale;

La scelta di usare le variabili di stato in due sistemi di riferimento differenti è data dal fatto che il quaternion, nel caso in cui il sistema di riferimento del corpo è coincidente con quello orbitale, è pari al quaternion unitario o identità, definito come $1_q = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$, rispetto a cui risulta agevolata la linearizzazione del modello. Il punto di lavoro nominale in cui deve operare il controllore è:

$$x_{nom} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

Lo stato nominale considerato corrisponde all'assetto che ha il satellite quando la terna in assi corpo coincide con la terna orbitale. Questo tipo di assetto viene chiamato in letteratura "Earth Fixed Point", perchè per tutta l'orbita il satellite "mostra",

alla Terra, la medesima superficie. Ad esempio, è un assetto utile per i satelliti la cui missione è la rilevazione fotografica del territorio.

Un'ipotesi molto usata in letteratura, e considerata anche in questo elaborato, è quella di porre $q_4 \approx 1$ in modo costante, o lentamente variabile, e quindi viene escluso dal vettore di stato del sistema linearizzato portando alla definizione di un nuovo stato, che è:

$$x(t) = \begin{bmatrix} q_r(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta q_r(t) \\ \delta \omega(t) \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

La coppia di controllo nominale corrispondente vale $T_c = u_{nom}$, pertanto $\delta u(t) = u(t) - u_{nom}$.

Un'ulteriore considerazione da fare riguarda ω_{BR} , infatti il suo valore è ricavabile dalla velocità assoluta e la velocità di trascinamento opportunamente ruotata:

$$\omega_{BR} = \omega_{BI} - A\omega_{RI} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

La matrice d'assetto, ottenuta utilizzando il quaternion come spiegato in appendice B, è pari alla matrice identità se valutata nel punto nominale, quindi $\omega_{BR,nom} = [0 \ 0 \ 0]^T$ e $\delta \omega_{BR} = \delta \omega_{BI}$. L'ultimo risultato riguarda la matrice $W(\omega_{BR})$ che è pari ad una matrice di zeri se valutata nel punto nominale.

Dopo tutta questa serie di considerazioni, la linearizzazione del modello rispetto al punto considerato, valida per piccoli scostamenti, è pari a:

$$\delta \dot{x}(t) = \frac{\partial F(x(t), u(t))}{\partial x} \Big|_{x=x_{Nom}} \delta(x(t)) + \frac{\partial F(x(t), u(t))}{\partial u} \Big|_{u=u_{Nom}} \delta(u(t)) \quad (7.13)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{q}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} & \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I^{-1} \end{bmatrix} \delta u(t) \quad (7.14)$$

dove:

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} W(\omega_{BR}) q_{BR} \Big|_{nom} = \frac{1}{2} W(\omega_{BR}) \Big|_{nom} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial \dot{q}}{\partial \omega} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} (W(\omega_{BI} - W(A)q_{BR}) \Big|_{nom} = \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{2} W(\omega_{BI}) q_{BR} \Big|_{nom} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} I^{-1} T_d \Big|_{nom} = \frac{3\mu}{(R_T + h_{orbita})^3} I^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(I_{xx} - I_{yy}) & 0 \\ 0 & 0 & 2(I_{xx} - I_{yy}) \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} I^{-1} S(\omega) I \omega \Big|_{nom} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Lo sviluppo dell'espressione $\frac{\partial \omega}{\partial \omega}$ è valida solo se la matrice d'inerzia è diagonale, altrimenti assume una forma più complessa, tuttavia nel caso in esame la matrice d'inerzia può in via approssimativa essere considerata diagonale (vedi 8.4 a pagina 60). Al fine di una corretta comprensione delle equazioni scritte, è importante ricordare che, dove non fosse presente il pedice in q e ω , omissso al fine di non appesantire oltremodo la scrittura delle equazioni, si fa implicitamente riferimento alle variabili dichiarate nel vettore di stato (vedi). Sostituendo le equazioni viste per lo Jacobiano, all'interno dell'equazione (7.14) si ottiene la parte relativa allo stato del sistema linearizzato.

7.4 Leggi di controllo

Una significativa porzione della letteratura recente sul controllo d'assetto magnetico tenta di indirizzare il problema del controllo verso leggi di controllo ottime. Tuttavia queste tecniche hanno il difetto di essere ancora difficilmente implementabile nelle missioni reali, poichè richiedono tempi di calcolo piuttosto ingenti e quindi anche una capacità di calcolo di un certo rilievo; avendo a che fare con un nanosatellite queste tecniche di controllo non sono assolutamente attuabili per le ridottissime dimensioni della navicella e quindi si richiedono algoritmi di calcolo il più snelli possibile.

Le possibilità di scegliere tra diverse tecniche di controllo magnetico diminuiscono ulteriormente, in quanto buona parte di queste leggi non sono applicabili su AtmoCube per due principali ragioni legate fra di loro:

- molta parte dei lavori sul controllo d'assetto sono dedicati alla regolazione dell'assetto nell'intorno dell'assetto d'equilibrio, condizione molto difficilmente raggiungibile per un'architettura come quella di AtmoCube;
- queste tecniche presuppongono la conoscenza dell'intero vettore di stato, cioè per poterle attuare deve essere noto l'assetto completo del satellite, ma per AtmoCube questa condizione non è vera, avendo a disposizione un solo sensore per la determinazione dell'assetto, che è il magnetometro.

Nella missione di AtmoCube si ha un solo attuatore magnetico posto lungo l'asse z (asse che punta in direzione del vettore velocità orbitale), questa scelta nasconde molteplici difficoltà, in quanto non è possibile ottenere un controllo su tutti e tre gli assi; per questo nel presente elaborato è stata utilizzata, a titolo di confronto e verifica, anche la legge di controllo con attuatori posti su tre assi.

7.4.1 Legge di controllo B-Dot

Il controllo non lineare gioca un ruolo importante nella stabilizzazione d'assetto, soprattutto nella fase iniziale di vita di una navicella; in questa fase si ha a che fare con elevate rotazioni e alte velocità angolari. Tuttavia queste leggi di controllo possono essere utilizzate lungo tutta il tempo di vita di una missione spaziale.

Una delle leggi di controllo più usate per il controllo di satelliti, soprattutto di piccole dimensioni, è la cosiddetta legge di controllo *B-Dot*. Questa legge di controllo si basa sulla misura del campo magnetico terrestre da parte del magnetometro. Usando solamente questo strumento, il controllore B-dot smorza le velocità angolari sulla base della misura, a bordo del satellite, delle componenti del vettore campo magnetico terrestre. La lettera 'B' è comunemente usata per indicare il campo magnetico della Terra, e la relativa derivata rispetto al tempo \dot{B}/dt è spesso indicata \dot{B} : da qui deriva il termine 'B-dot' (B-punto).

La legge di controllo B-Dot è data da:

$$m = -K\dot{B}_m \quad (7.20)$$

oppure la si può vedere espressa in termini di segno della derivata:

$$m = -K\text{segno}(\dot{B}_m) \quad (7.21)$$

dove K è la matrice dei guadagni ed è una matrice definita positiva e \dot{B}_m è la derivata rispetto al tempo del campo magnetico misurato dal magnetometro.

Il principio con cui opera un controllore B-dot è quello di minimizzare il vettore derivata nel tempo del campo magnetico, quindi permette alla navicella di avere una velocità angolare molto vicina a quella orbitale forzando la derivata del campo magnetico a zero.

La derivata del campo geomagnetico, ricordando l'equazione (7.6) trascurando il rumore bianco, può essere calcolata in questo modo:

$$\dot{B}_m = \dot{A}B_{ECI} + A\dot{B}_{ECI} = B_m \times \omega + A\dot{B}_{ECI} = S(\omega)B_m + A\dot{B}_{ECI} \quad (7.22)$$

Da cui si può condurre il calcolo della coppia magnetica di controllo, che quindi risulta:

$$T_{mag} = m \times B_m = (-K\dot{B}_m) \times B_m = -K(B_m \times \omega + A\dot{B}_{ECI}) \times B_m \quad (7.23)$$

$$= -K(B_m \times \omega) \times B_m - KA\dot{B}_{ECI} \times B_m \quad (7.24)$$

Considerando $A\dot{B}_{ECI} \approx \omega_0$ dove ω_0 è la velocità angolare orbitale, si può notare, siccome K è una matrice definita strettamente positiva, come la legge di controllo (7.20) effettivamente riduce l'energia cinetica del satellite. Inoltre, cosa da non sottovalutare, questa legge è molto facilmente implementabile a bordo della navicella.

Ora, si pensi di applicare la legge (7.20) al semplice esempio di figura 7.2: si consideri che il corpo abbia una certa rotazione lungo l'asse Z, con un momento d'inerzia I_z e una velocità angolare ω_z . Supponiamo che il campo magnetico terrestre giaccia sul piano X-Y, con un modulo pari a B_0 e che venga misurato dal magnetometro posto lungo l'asse X, quindi la componente \vec{B}_x di \vec{B} . Nel nostro esempio si supponga che ci sia una sola bobina posta lungo l'asse X.

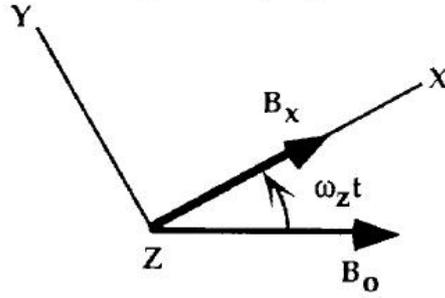


Figura 7.2: Posizionamento degli assi d'esempio.

Dalla figura 7.2 si può notare come $B_x = B_0 \cos(\omega_z t)$, allora $\dot{B}_x = -B_0 \sin(\omega_z t)t$. Usando ora la legge di controllo proporzionale (7.20) il dipolo generato è:

$$m_x = -K \dot{B}_x = K B_0 \omega_z \sin(\omega_z t) \quad (7.25)$$

per l'asse X. A causa della semplice geometria utilizzata in questo esempio, $\vec{m} \times \vec{B}$ sarà un vettore nella direzione Z pari a $T_z = m_x B_y$.

La figura 7.2 mostra inoltre come $B_y = -B_0 \sin(\omega_z t)$. Allora si ha:

$$T_z = [K B_0 \omega_z \sin(\omega_z t)] [-B_0 \sin(\omega_z t)] \quad (7.26)$$

$$T_z = -K B_0^2 \omega_z \sin^2(\omega_z t). \quad (7.27)$$

$$(7.28)$$

Supponendo di considerare un valore medio di coppia generata dal controllore proporzionale, quindi prendendo $\sin^2(\omega_z t) = 0.5$, si ha:

$$T_{z,media} = -\frac{K B_0^2 \omega_z}{2} \quad (7.29)$$

Ricordando ora che la variazione del momento angolare equivale alla coppia applicata (5.13) si ha:

$$I_z \dot{\omega}_z = T_{z,media} = -\frac{K B_0^2 \omega_z}{2} \quad (7.30)$$

Da cui, ordinando l'equazione (7.30) si ha:

$$\dot{\omega}_z + \frac{K B_0^2 \omega_z}{2} = 0 \quad (7.31)$$

che è un'equazione differenziale del primo ordine espressa nella forma $\dot{\omega}_z + \frac{\omega_z}{\tau} = 0$. La soluzione quindi è:

$$\omega_z = \omega_z(0) e^{-t/\tau} \quad (7.32)$$

con $\tau = \frac{2I_z}{K B_0^2}$ e $\omega_z(0)$ è la velocità angolare iniziale. Da (7.32) si può vedere come il controllare fa sì che gli scostamenti angolari decadano esponenzialmente.

Nell'ipotesi di introdurre ulteriori attuatori lungo gli altri assi del satellite, si può dimostrare che, quello che varia, non è la forma dell'equazione differenziale da risolvere, ma a cambiare (per la precisione a diminuire) è la costante τ con cui le velocità angolari vengono smorzate dal regolatore.

La differenza principale tra le equazioni (7.20) e (7.21) sta principalmente nella taratura della costante K ; infatti mentre nel B-dot con segno è tipica la scelta di porre K al limite di saturazione delle bobine. Questa scelta è motivata dalla conoscenza del fatto che $\text{segno}(\dot{B}_m)$ ha come uscita 1 nel caso di derivata positiva e -1 nel caso di derivata negativa, quindi è chiaro che porre K al limite di saturazione delle bobine significa generare un dipolo massimo ogni volta che la derivata è diversa da 0. Questo controllo ha il vantaggio di intervenire molto rapidamente, ma il suo intervento è molto brusco e quindi la navicella tende a oscillare nell'intorno della condizione d'equilibrio. Riassumendo, il B-dot con segno permette:

- buone prestazioni nel caso di elevate velocità angolari;
- prestazioni insoddisfacenti nel caso di piccole velocità angolari.

In (7.20) K viene tarato in maniera tale che il controllo abbia un comportamento più fine, quindi si hanno prestazioni molto buone nel caso di piccole velocità angolari e invece ha una risposta più lenta nel caso si debbano smaltire velocità, e quindi momenti, angolari intense.

Simulazioni

Questa parte dell'elaborato ha lo scopo principale di presentare il modello realizzato nelle sue totalità, analizzandone le componenti e mostrando i risultati ottenuti sfruttando questo ambiente di simulazione. Infine si provvederanno a fornire le indicazioni per la progettazione del sistema di controllo, confrontando dati provenienti da tecniche di controllo diverse.

Il capitolo è essenzialmente diviso in due parti: la prima in cui si presenterà il modello nella sua composizione e nel suo funzionamento, testandone anche la bontà tramite varie prove condotte nelle varie sezioni della modellizzazione (paragrafi [8.1](#) e [8.2](#)); una seconda, invece, in cui si andranno a presentare e discutere i risultati provenienti dalle diverse leggi di controllo implementate (paragrafo [8.3](#)).

8.1 Modello dinamica orbitale e ambiente

Nello studio e nella realizzazione del modello ci si è serviti di un simulatore: la scelta, per ragioni di comodità e conoscenza personale, è caduta sull'ambiente Matlab/Simulink. Tramite questo ambiente di sviluppo si è giunti alla creazione del modello che è raffigurato schematicamente nella rappresentazione a blocchi di figura [8.1](#); in questa figura si possono riconoscere diverse parti che lo compongono: poichè il primo blocco *Ambiente e Orbita* racchiude all'interno di sè svariati sottosistemi, necessita di essere rappresentato graficamente, questa rappresentazione è visibile in figura [8.2](#). In questa parte del modello si procede al calcolo delle componenti orbitali e ambientali viste ai capitoli [4 a pagina 21](#) e [3 a pagina 11](#); all'interno di questo sottosistema, quindi, si implementano le equazioni relative alla dinamica orbitale che, come si è visto, fornisce tutti gli elementi necessari all'analisi dell'andamento di un corpo nello spazio e permette quindi di poterlo individuare in maniera puntuale. Dalla conoscenza dei sei parametri orbitali si ricava il vettore raggio e il vettore velocità, prima in coordinate orbitali, poi applicando le trasformazioni [4.18 a pagina 27](#) si ricavano i grafici [8.3](#) e [8.4](#), in cui rispettivamente è presentato l'andamento

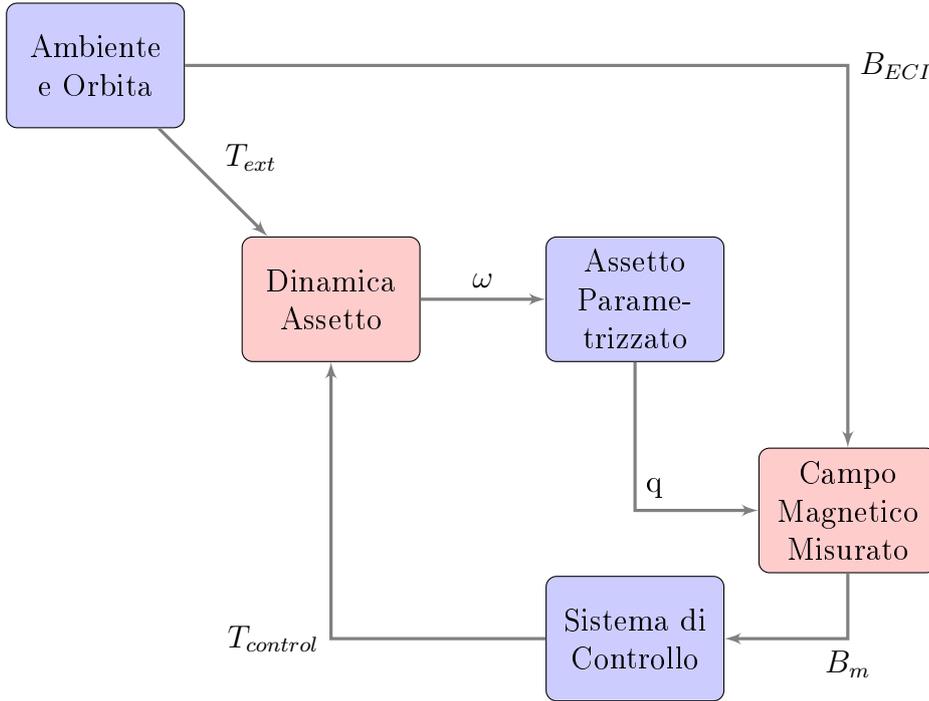


Figura 8.1: Rappresentazione a blocchi del modello realizzato

della posizione e velocità del satellite in funzione del tempo, in questo caso un'orbita. Inoltre si effettuano le trasformazioni per ottenere il vettore raggio e il vettore velocità nelle coordinate desiderate.

Il dato più interessante è possibile estrarlo dall'analisi di figura 8.4: come si può vedere la velocità è sensibilmente maggiore al perigeo (il punto più vicino alla terra) che all'apogeo. Questo comportamento deriva dalla conservazione del momento angolare: la velocità di un satellite in un'orbita ellittica diminuisce continuamente finché non raggiunge l'apogeo, dove è minima, per poi aumentare continuamente fino a quando non raggiunge il perigeo, dove è massima; è possibile ricavare le velocità al perigeo e all'apogeo:

$$v_p = \sqrt{\frac{\mu(2a - (r_p + R_{eq}))}{a(r_p + R_{eq})}} \quad (8.1)$$

$$v_a = \sqrt{\frac{\mu(r_p + R_{eq})}{a(2a - (r_p + R_{eq}))}} \quad (8.2)$$

Ricordando che i parametri orbitali sono:

- semi-asse maggiore

$$a = \frac{R_a + R_p}{2} + R_{eq} = 7273Km \quad (8.3)$$

dove R_{eq} è il raggio equatoriale terrestre e vale circa: 6378.13649 Km;

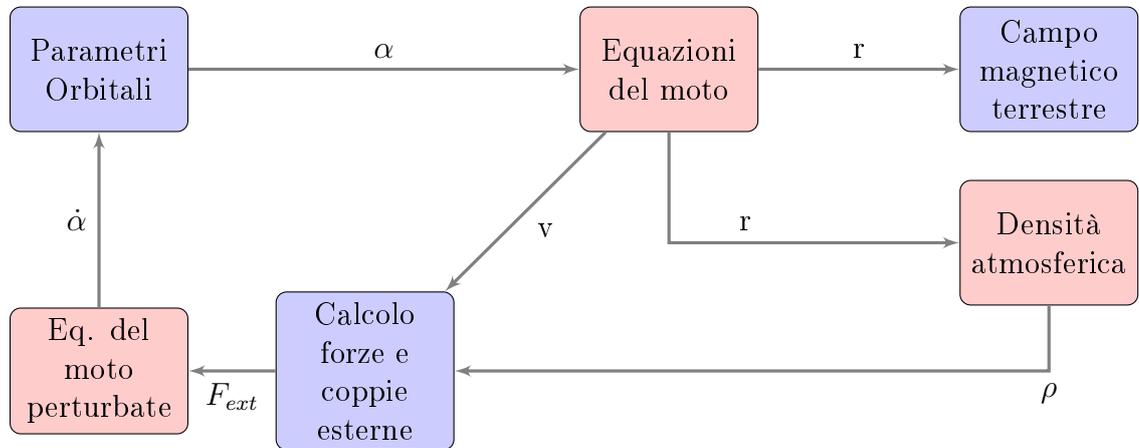
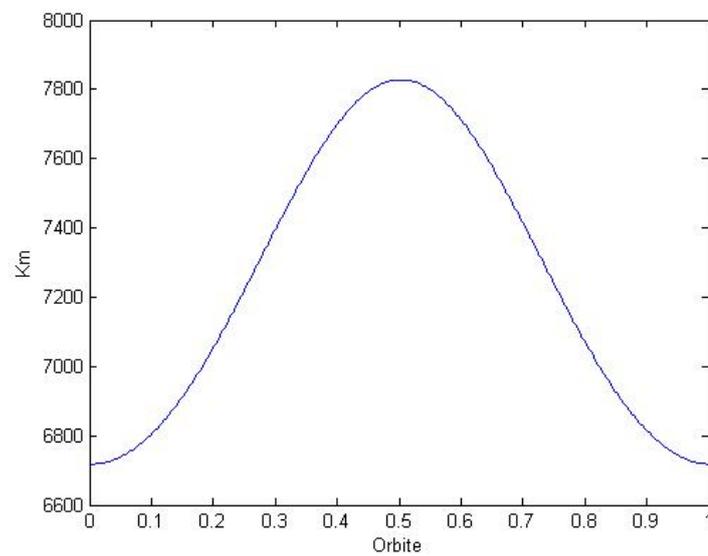
Figura 8.2: Rappresentazione del blocco *Ambiente e Orbita*

Figura 8.3: Evoluzione nel tempo del modulo del vettore posizione.

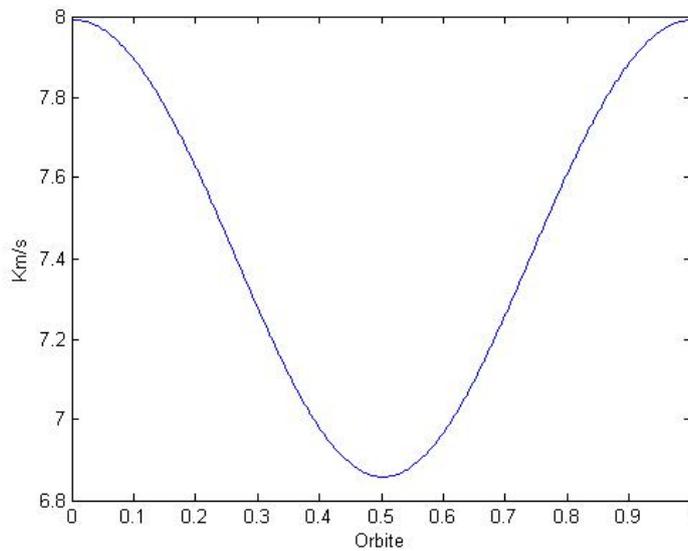


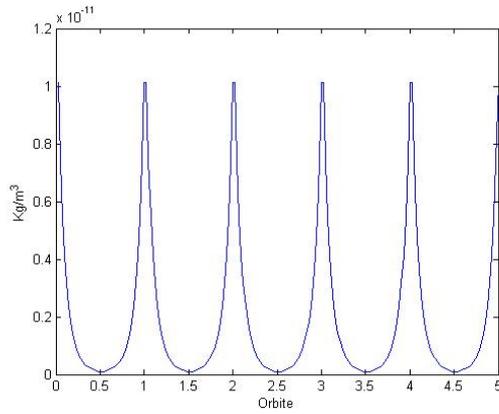
Figura 8.4: Evoluzione nel tempo del modulo del vettore velocità

- $e = 0.0763$;
- $i = 71^\circ$;
- Ω e ω non sono definibile, perchè dipendono dal giorno e ora in cui avverrà il lancio del satellite;
- $M = n(t - t_0)$, dove $n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = 0.01$ rad/s

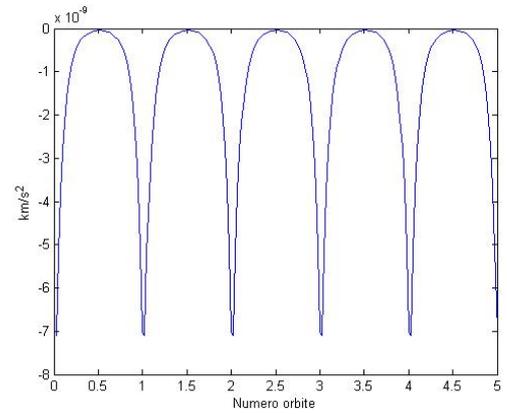
Per quello che riguarda la parte concernente l'ambiente si realizzano i modelli già presentati al capitolo 3; quindi per quel che riguarda la densità atmosferica si è implementato il modello di Harris-Priester e i risultati per AtmoCube sono visibili in figura 8.5(a). Come si può notare la densità è sensibilmente più elevata al perigeo che all'apogeo, questo perchè la navicella quando raggiunge il perigeo (ricordando che $R_p = 340$ Km) incontra forze aerodinamiche che diventano decisamente rilevanti. Sempre all'interno di questo blocco si valuta la componente del disturbo aerodinamico, attraverso la relazione (6.10) e tenendo conto del drag aerodinamico, che ha il comportamento di figura 8.5(b).

Il campo magnetico terrestre attuato per AtmoCube è un modello IGRF di ordine 4, gli andamenti nel tempo del campo magnetico sono visibili nelle figure 8.6(a), 8.6(b) e 8.6(c). La forza aerodinamica valutata lungo i tre assi è visibile nelle figure 8.7(a), 8.7(b) e 8.7(c) Come si vede dalle figure 8.5(b) e 8.7(a) l'effetto della forza aerodinamica è sensibilmente maggiore al perigeo, questo perchè la forza aerodinamica dipende fortemente dall'altitudine. L'effetto di tali forze agenti sulla superficie del nanosatellite causa forti deviazioni nell'assetto del satellite.

Infine si procede al calcolo della coppia aerodinamica nei grafici 8.8(a), 8.8(b) e

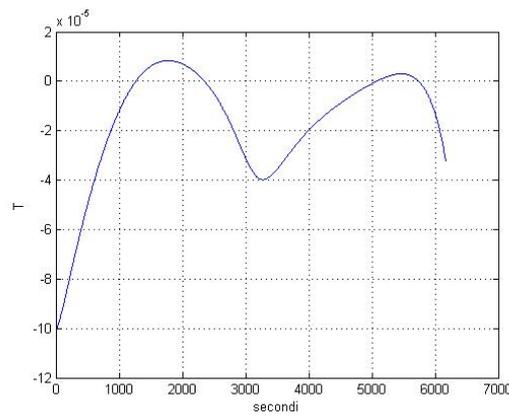


(a) Densità atmosferica. 5 orbite simulate.

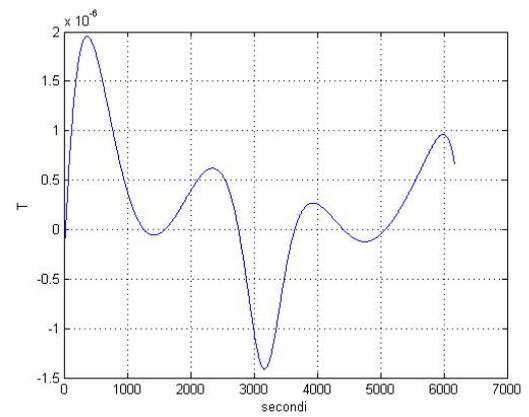


(b) Drag aerodinamico valutato in cinque orbite.

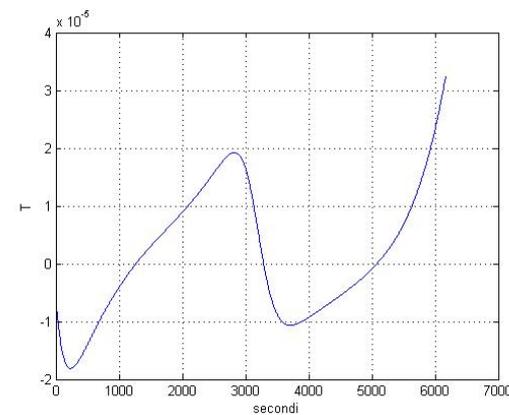
Figura 8.5: Densità atmosferica e drag aerodinamico per AtmoCube.



(a) Componente r del campo magnetico terrestre



(b) Componente θ del campo magnetico terrestre



(c) Componente ϕ del campo magnetico terrestre

Figura 8.6: Campo magnetico terrestre calcolato in coordinate polari.

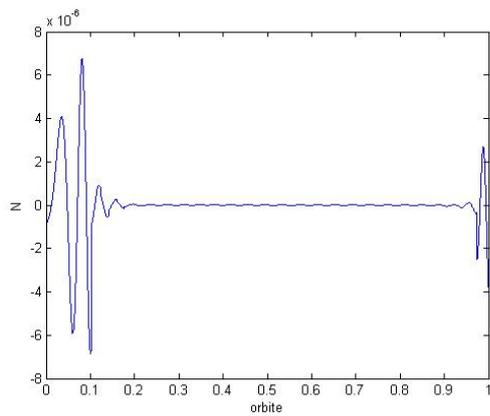
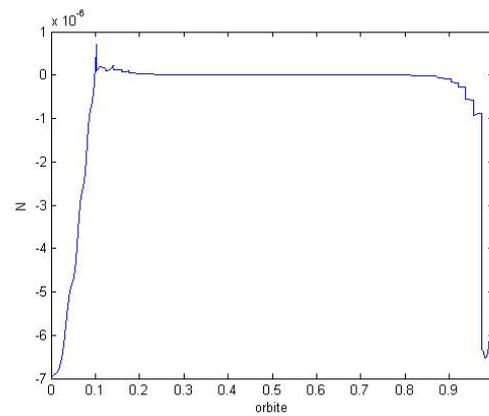
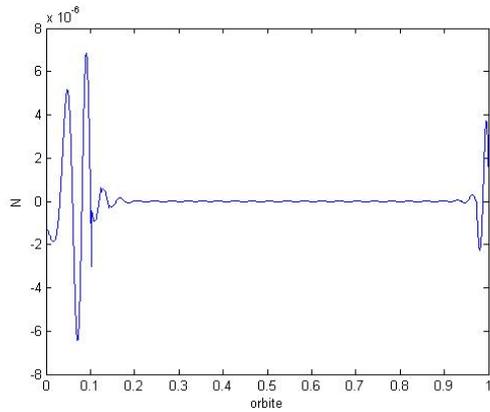
(a) Componente x della forza aerodinamica(b) Componente y della forza aerodinamica(c) Componente z della forza aerodinamica

Figura 8.7: Forza aerodinamica valutata lungo un'orbita.

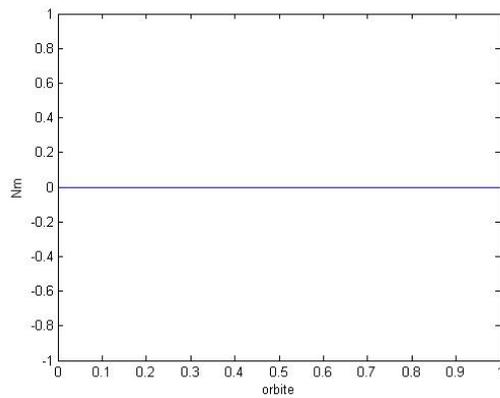
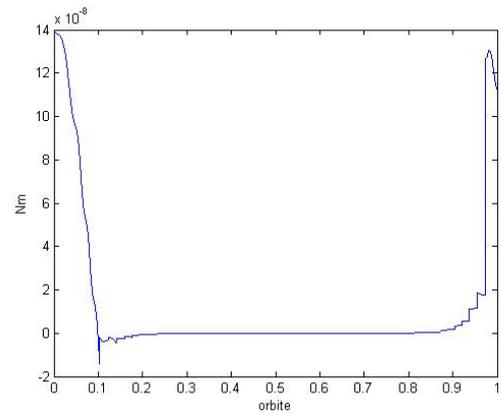
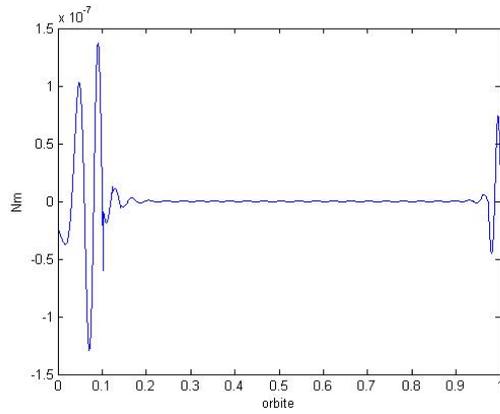
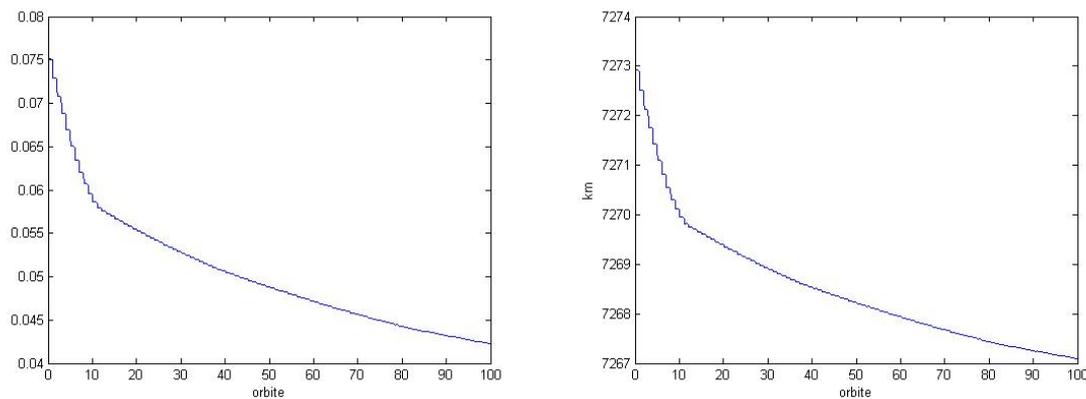
(a) Componente x della coppia aerodinamica(b) Componente y della coppia aerodinamica(c) Componente z della coppia aerodinamica

Figura 8.8: Coppia aerodinamica valutata lungo un'orbita.



(a) Effetti aerodinamici sull'eccentricità(100 orbite simulate). (b) Effetti aerodinamici sul semi-asse maggiore(100 orbite simulate).

Figura 8.9: Effetti aerodinamici sui parametri orbitali.

8.8(c). Questi disturbi causano un decadimento e una circolarizzazione dell'orbita, questi effetti sono visibili in figura 8.9(a) e 8.9(b). La circolarizzazione dell'orbita (figura 8.9(a)) mostra che l'eccentricità cala lentamente ad ogni rivoluzione del satellite. Infine, il decadimento dell'orbita è visibile in figura 8.9(b). Mentre l'altezza geodetica al periasse rimane sostanzialmente invariata, dopo cento orbite la distanza dell'apoasse è di circa sette chilometri minore rispetto al valore iniziale di 340 chilometri.

8.2 Modelli d'assetto, del sistema di controllo e validazione risultati

Proseguendo nell'analisi dello schema a blocchi 8.1, i blocchi *Dinamica Assetto* e *Assetto Parametrizzato* implementano le conoscenze emerse al capitolo 5. L'interno del sottosistema *Dinamica Assetto* ha come ingresso le coppie esterne, le coppie di controllo e la matrice d'inerzia, attraverso queste, si procede al calcolo delle velocità angolari, in accordo con l'equazione 5.13 a pagina 33.

La matrice d'inerzia per il satellite AtmoCube è:

$$I = \begin{bmatrix} 1.93 \cdot 10^{-3} & 3.15 \cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 1.95 \cdot 10^{-3} & 1.22 \cdot 10^{-5} \\ 2.68 \cdot 10^{-5} & 0 & 1.89 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

dove tutti i termini della matrice d'inerzia (8.4) sono calcolati in $\text{kg}\cdot\text{m}^2$.

E' possibile effettuare un test per validare questa parte di modello, per farlo si

prendono come valori di coppie esterne, un vettore costante del tipo:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

inoltre si considera una matrice d'inerzia identica e delle condizioni iniziali nulle sulle velocità angolari, cioè $\omega_x(t=0) = \omega_y(t=0) = \omega_z(t=0) = 0$. Così facendo il sistema di equazioni differenziali 5.13 a pagina 33 si risolve banalmente, infatti:

$$\omega_x = \frac{M_x}{I_{xx}} t \quad (8.6)$$

$$\omega_y = 0 \quad (8.7)$$

$$\omega_z = 0 \quad (8.8)$$

quindi ω_x cresce linearmente all'aumentare del tempo, essendo I_{xx} e M_x pari ad 1, mentre ω_y e ω_z rimangono a 0. Affinchè il modello che si è realizzato sia corretto, deve produrre questi risultati; la simulazione condotta sulla base di quanto detto produce i grafici di figure 8.10(a), 8.10(b) e 8.10(c). Come è visibile gli andamenti sono quelli attesi e questo ci consente di concludere che il modello della dinamica è stato implementato in maniera corretta.

Dopo aver calcolato le velocità angolari si passa alla parametrizzazione d'assetto, attraverso il sottosistema *Assetto Parametrizzato*; la parametrizzazione viene realizzata in accordo con l'espressione 5.14 a pagina 33.

Si supponga di procedere ora al calcolo dell'andamento dei quaternioni sulla base del test già avviato per validare il modello della dinamica d'assetto; si prendano delle condizioni iniziali per i quaternioni del tipo:

$$\begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \\ q_3(0) \\ q_4(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Con queste condizioni iniziali quello che ci si aspetta è che q_4 diminuisca, poichè scatta il vincolo di norma unitaria per i quaternioni (vedi appendice B), q_1 invece aumenti con il quadrato del tempo fino a che, anche in questo caso, non scatta nuovamente il vincolo di norma unitaria e decresce; q_3 e q_4 permangono a 0 lungo tutta la simulazione. Tali andamenti sono visibili nelle figure 8.11(a), 8.11(b), 8.11(c) e 8.11(d) e rispettano quanto atteso.

Ricavati i quaternioni è possibile costruire la matrice dei coseni direttori, utilizzando la relazione B.23 a pagina 84. Ottenuta la matrice è possibile calcolare il campo magnetico terrestre misurato dal magnetometro, in accordo con 7.5 a pagina 45; questo calcolo viene effettuato attraverso il blocco denominato *Campo Magnetico Misurato*. Il campo misurato dalla navicella è il termine che verrà retroazionato per essere utilizzato dal sistema di controllo; il blocco *Sistema di Controllo* non farà altro che generare le coppie magnetiche attraverso le tecniche viste al capitolo 7 e i cui risultati verranno presentati al paragrafo 8.3.

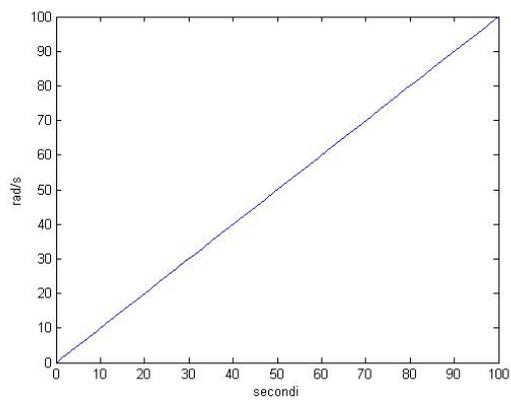
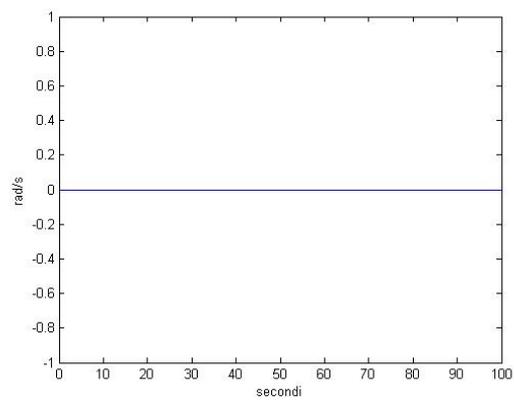
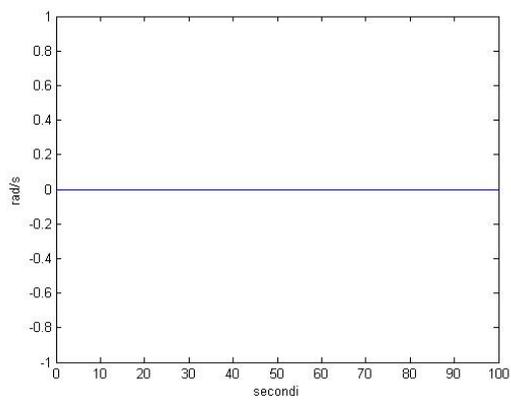
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.10: Test sulle velocità angolari.

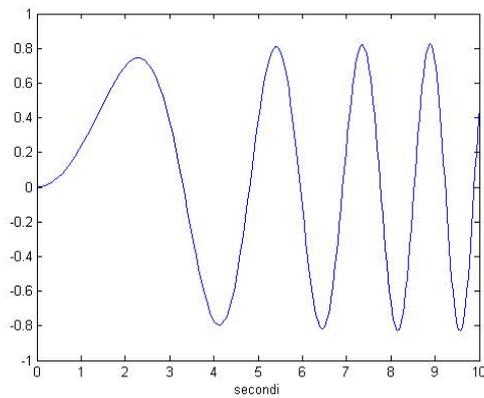
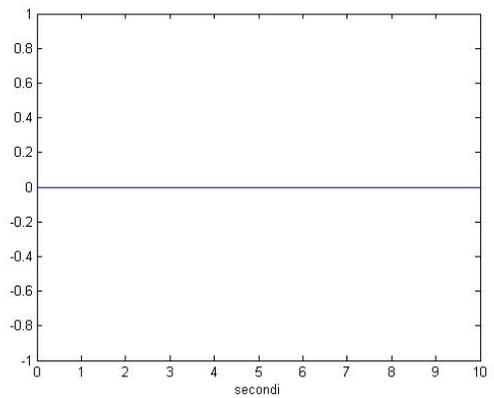
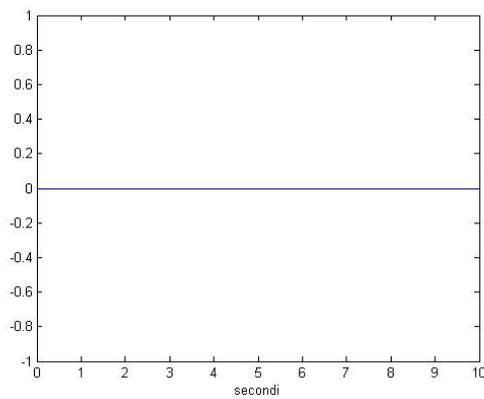
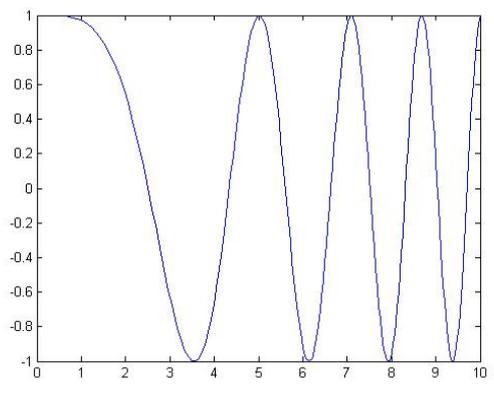
(a) Andamento q_1 al variare del tempo(b) Andamento q_2 al variare del tempo(c) Andamento q_3 al variare del tempo(d) Andamento q_4 al variare del tempo

Figura 8.11: Andamento dei quaternioni nel tempo.

8.3 Risultati delle leggi di controllo

In questo paragrafo si presenteranno i risultati delle leggi di controllo utilizzate nelle simulazioni effettuate sfruttando il modello 8.1.

Le leggi di controllo sfruttate in questo lavoro sono essenzialmente tre:

- B-dot utilizzando una bobina sola lungo l'asse z (B-dot sia nella versione segno, sia nella versione "proporzionale");
- B-dot utilizzando tre bobine lungo gli assi della navicella (B-dot sia nella versione segno, sia nella versione "proporzionale");
- controllo combinato B-dot con segno insieme al B-dot proporzionale, sia nel caso uno e tre assi;

Il controllo B-dot lungo un asse ha il difetto rilevante di non permettere un controllo su tutti tre gli assi; tuttavia questa è la soluzione adottata su AtmoCube per motivi di spazio disponibile sulla navicella (si ricorda che AtmoCube è un cubo di dimensioni 10x10 cm) e per evitare di interferire con la strumentazione di bordo.

Verranno inoltre eseguite delle simulazioni che tengano conto del dipolo residuo presente nelle bobine e del rumore di cui è affetto il magnetometro.

8.3.1 Simulazioni considerando rumore, dipolo residuo e lancio

Per progettare un controllo in maniera completa non si può non tenere conto dei rumori di misura, delle condizioni lancio e di un dipolo residuo presente nelle bobine magnetiche; nelle simulazioni seguenti si terrà in conto di questi tre termini in questo modo:

- Lancio: si ipotizza una velocità angolare iniziale di circa venti volte il moto orbitale (ricordando che n è pari a 0.001 rad/s);
- Rumore: come già detto si usa un rumore bianco, si veda 7.6 a pagina 46, pari a $E(\nu(t)\nu(t)^T) = 2 \cdot 10^{-9}$ T. ;
- Dipolo Residuo: si considera un dipolo residuo pari a 1/100 del dipolo totale;

Consideriamo il caso in cui si è in condizioni di lancio, ma si trascurino rumore e dipolo. La prima simulazione che si mostra è quella relativa ad un controllo B-dot con segno, attuato con tre bobine lungo i tre assi, i cui risultati sono visibili alle figura 8.12(a), 8.12(b) e 8.12(c); per la taratura della costante K , la scelta più comune è quella di porla al limite di saturazione delle bobine, in questo caso pari a $K = 0.5$. I grafici ci confermano come questo tipo di legge di controllo assicuri dei tempi di risposta molto buoni, ma allo stesso tempo, non permetta un controllo più

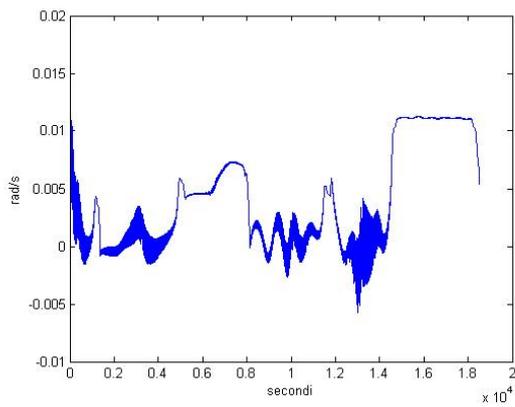
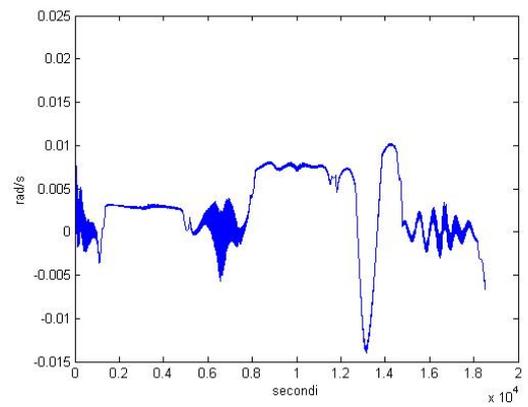
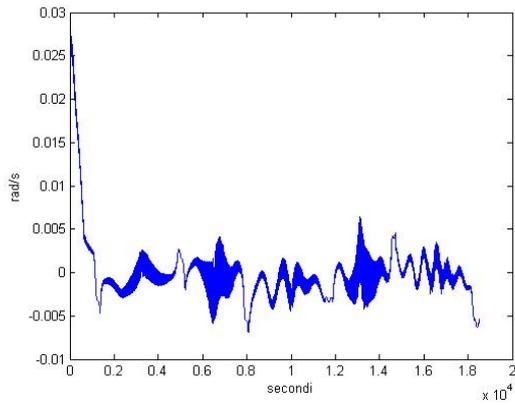
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.12: Risultati B-dot con segno, con attuatore lungo i tre assi corpo. 3 orbite simulate.

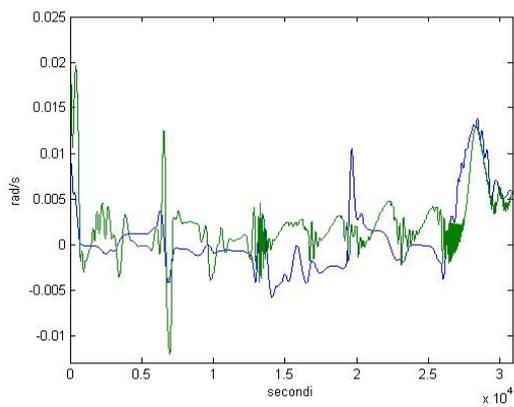
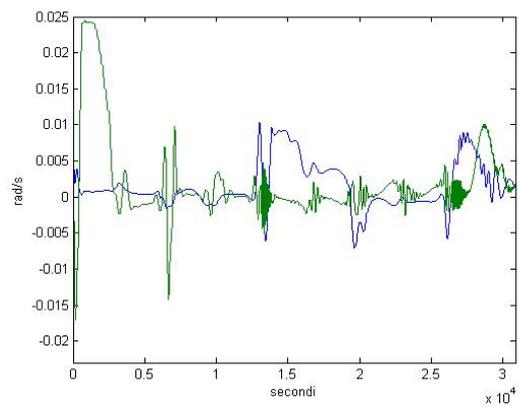
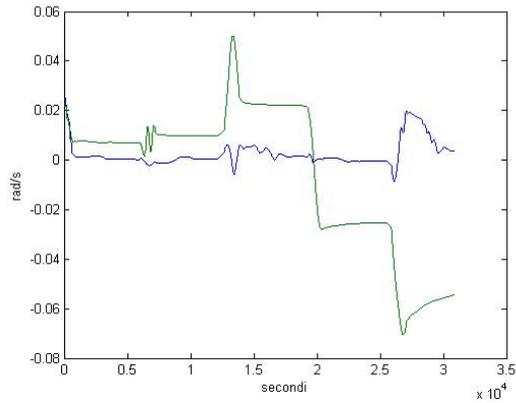
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.13: Confronto tra le tecniche di controllo B-dot lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 4 orbite simulate

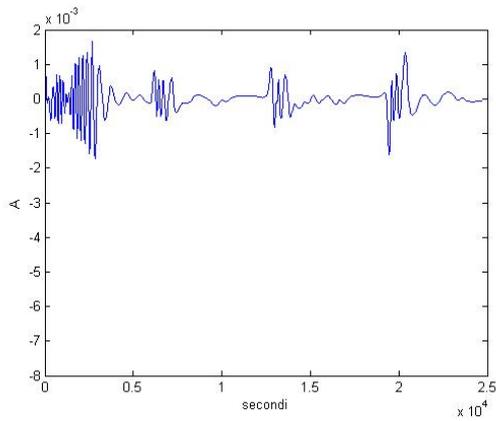
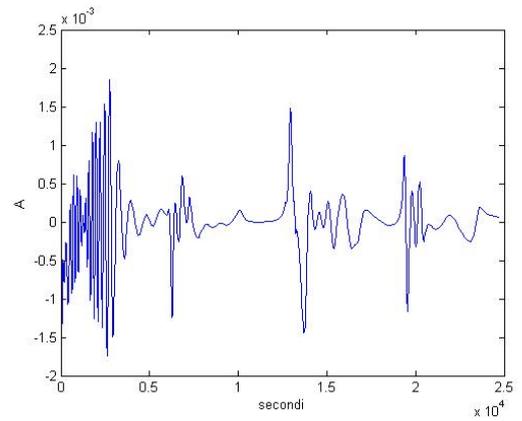
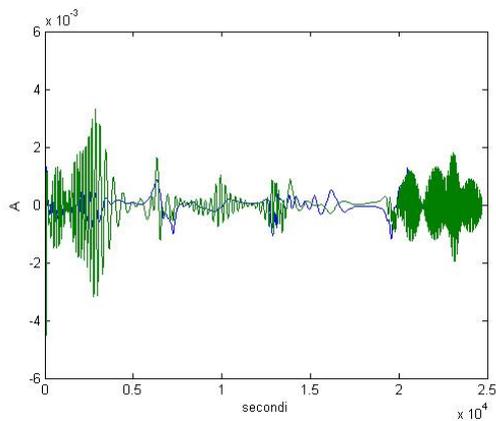
(a) Andamento I_x al variare del tempo(b) Andamento I_y al variare del tempo(c) Andamento I_z al variare del tempo

Figura 8.14: Confronto tra le correnti erogate delle tecniche di controllo B-dot lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 5 orbite simulate

fine nell'intorno di una condizione d'equilibrio. Questa affermazione necessita di una spiegazione ulteriore, in quanto bisogna tenere in conto che la condizione d'equilibrio per AtmoCube è pressochè impossibile da raggiungere per effetto delle rilevanti forze esterne in gioco (si veda 8.7(a), 8.7(b) e 8.7(c)) che ad ogni passaggio al perigeo del satellite causano delle forti deviazioni rispetto alla condizione d'assetto desiderato, quindi non si possono ottenere delle condizioni d'equilibrio, neppure considerando delle condizioni di funzionamento a regime.

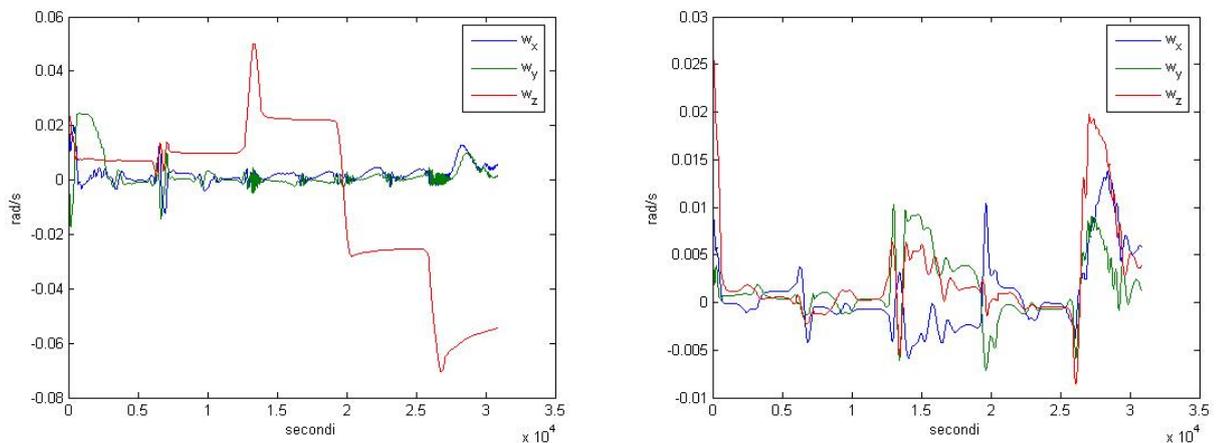
Si rimanga in condizione di lancio, la simulazione successiva riguarda un controllo con legge B-dot proporzionale. Da quanto è possibile ricavare dai grafici di figura 8.13(a), 8.13(b) e 8.13(c) (con la costante K posta al valore di 5000) si può concludere come il controllo su tre assi assicura delle prestazioni molto buone e si smorzino le iniziali rotazioni. Infatti si nota come le forze aerodinamiche agiscono al perigeo dell'orbita causando le oscillazioni più importanti e visibili: si può notare infatti (nella figura 8.13(c) è molto evidente) come vi sia la presenza di tre picchi principali che sono dovuti al passaggio del satellite al perigeo.

E' interessante anche valutare i consumi delle politiche di controllo di questo tipo; per fare ciò si generano i grafici di figura 8.14(a), 8.14(b) e 8.14(c). Ovviamente nel caso di controllo su un asse solo, le correnti lungo gli assi x e y sono nulle non essendoci attuatore magnetico su questi assi. Da questi grafici si vede come il consumo medio del sistema di controllo si aggiri intorno a qualche millesimo di Ampere, risultato più che accettabile poichè la corrente massima messa a disposizione per il sistema di controllo è di $0.2 A$, che può essere raggiunta solo per brevi periodi per evitare che la batteria si scarichi troppo rapidamente.

Il prossimo passo è quello di introdurre del rumore di misura e del dipolo residuo; il rumore andrà a disturbare la misura del campo magnetico terrestre e quindi inficierà la determinazione della derivata del campo nella legge di controllo; la simulazione di figura 8.15(a), in cui si adotta un controllo B-dot lungo un asse solamente, mostra come il rumore introduca un errore rilevante nella stima del dipolo che il sistema di controllo deve produrre. La figura 8.15(b) mostra invece un controllo B-dot lungo tre assi affetto da rumore; dal confronto tra i grafici 8.15(a) e 8.15(b) si nota chiaramente come il controllo su tre assi dia delle prestazioni molto migliori nei confronti di rumore di misura rispetto al controllo lungo un unico asse.

8.3.2 Controllo a commutazione

L'idea principale di questa politica di controllo nasce dalla conoscenza della diversa tipologia di risposta dei due controlli analizzati fino a questo punto; infatti come già messo in evidenza, il controllo B-dot con segno ha una risposta molto repentina nei confronti di velocità angolari alte, mentre tende a produrre un comportamento oscillatorio nell'intorno della condizione d'equilibrio. Il controllo proporzionale invece funziona molto bene nell'intorno della condizione d'equilibrio. Conoscendo ciò si può ipotizzare un controllo a commutazione, in cui si utilizzi un controllo B-dot con segno quando le velocità angolari superano una certa tolleranza stabilita a priori ed



(a) Evoluzioni nel tempo delle velocità angolari.

(b) Evoluzioni nel tempo delle velocità angolari.

Figura 8.15: Confronto tra le tecniche di controllo lungo 1 e 3 assi considerando del rumore di misura. 5 orbite simulate.

invece si usi l'altra tipologia di controllo all'interno della fascia prestabilita, quindi in condizioni di regime. Questa legge di controllo è esprimibile dal seguente pseudo codice:

```
if (abs(w) > wlim) B-dot con segno
else B-dot proporzionale
```

dove in questa simulazione w_{lim} è stato posto a 0.01 rad/s.

Si realizza questo controllo a commutazione andando a considerare la fase di lancio, della quale si può tenere in conto ponendo le condizioni iniziali sulle velocità angolari diverse da 0 e più precisamente pari a 0.02 rad/s. Le prima simulazione che si mostra è quella relativa ad un controllo a commutazione su tre e un asse, in assenza di rumore, i cui risultati sono visibili nelle figure 8.16(a), 8.16(b) e 8.16(c). Di interesse ancora maggiore è quello di andare a confrontare i controlli a commutazione con 1 e 3 assi affetti da rumore di misura e ci si ponga sempre in condizioni di lancio. I grafici 8.17(a), 8.17(b) e 8.17(c) forniscono un confronto tra le due politiche di controllo e indicano chiaramente che le prestazioni fornite da un controllo su tre assi è nettamente migliore di un controllo su un asse solo. Infatti si nota come per il controllo su un asse solo le velocità angolari lungo x e y, pur convergendo, hanno tempi d'assestamento piuttosto lunghi.

Infine, introducendo anche del dipolo residuo ad una navicella in condizioni di lancio, si ottengono i risultati di figura 8.18(a), 8.18(b) e 8.18(c); come già detto il controllo su tre assi offre prestazioni molto buone rispetto al controllo su un asse solo.

Dalle simulazioni presentate fino ad ora, risulta evidente come un controllo a commutazione su tre assi offre delle prestazioni molto buone e adeguate ad una missione

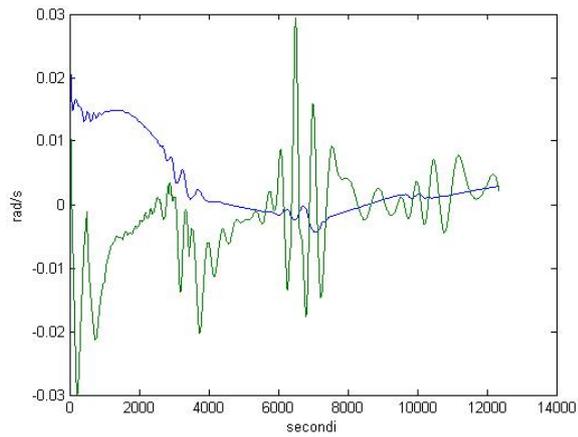
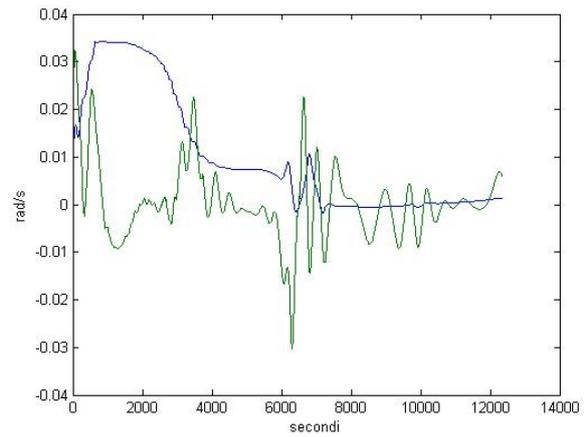
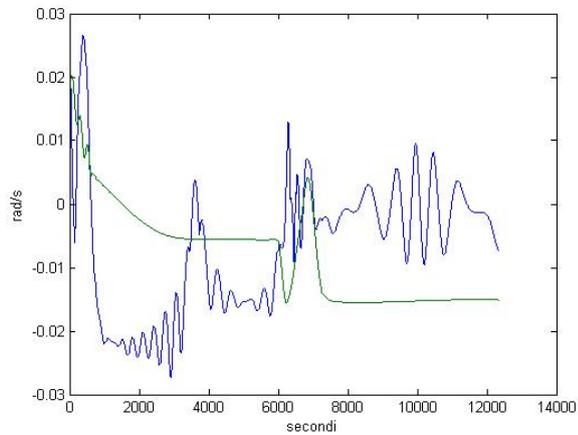
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.16: Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate

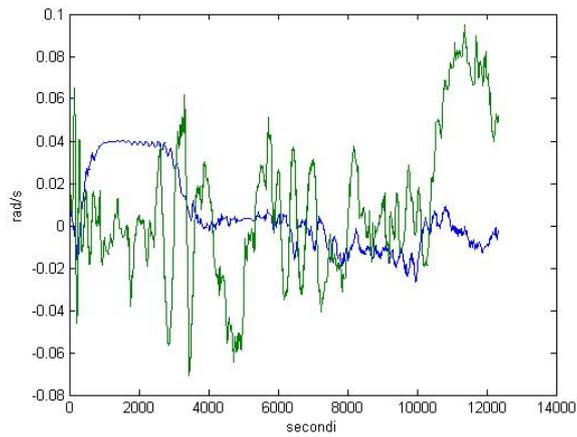
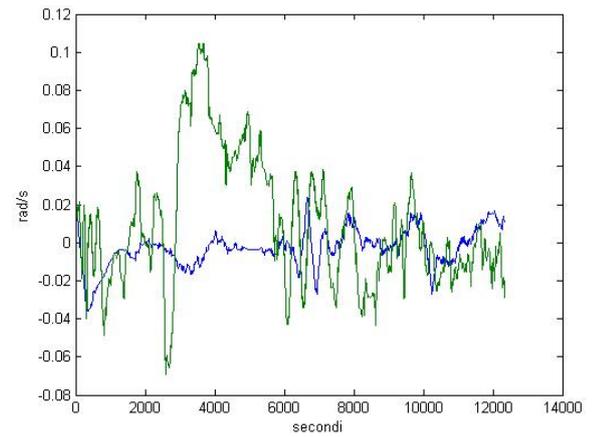
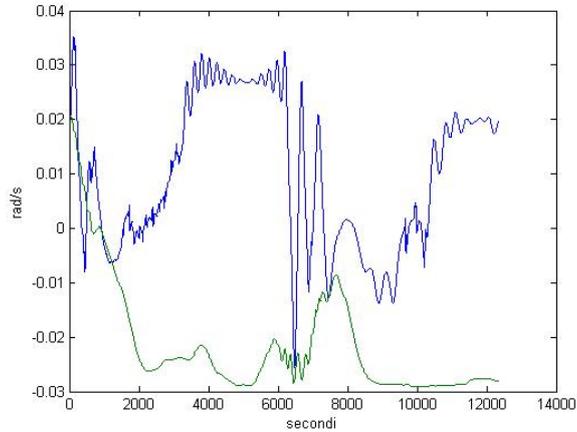
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.17: Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate

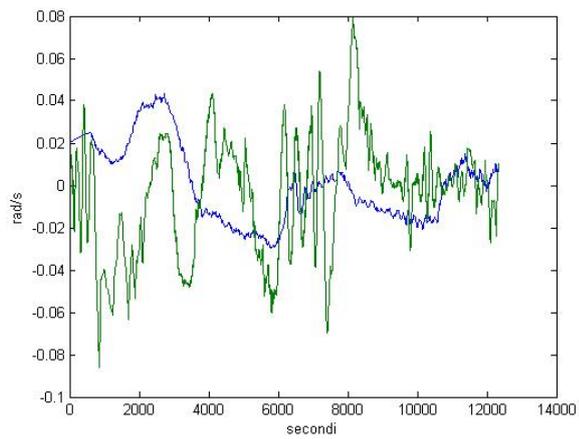
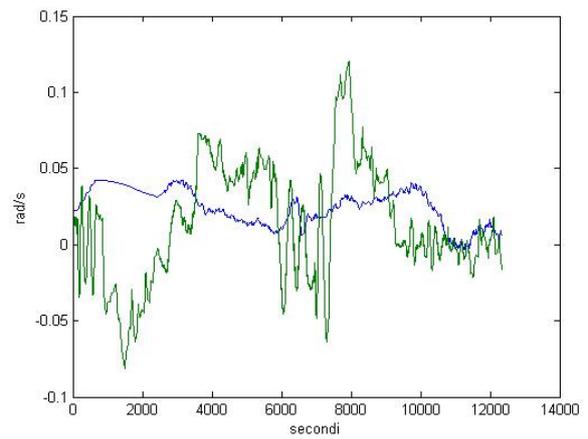
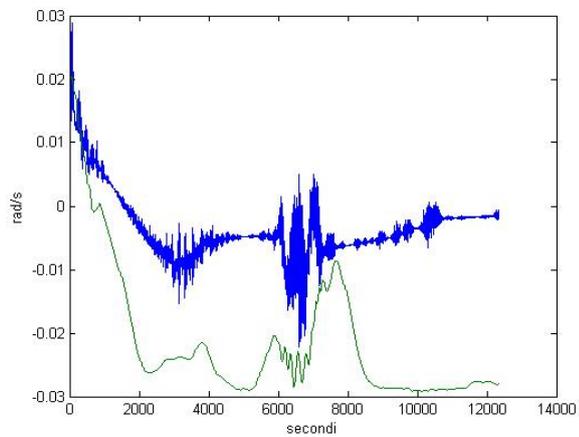
(a) Andamento ω_x al variare del tempo(b) Andamento ω_y al variare del tempo(c) Andamento ω_z al variare del tempo

Figura 8.18: Confronto tra le tecniche di controllo a commutazione lungo 3 (blu) e 1 (verde) asse. 2 orbite simulate

come AtmoCube anche a fronte di rumore di misura e in condizioni di lancio. Tuttavia, come si è già detto, il controllo lungo tre assi non è possibile per motivi di spazio disponibile, perciò ci si deve accontentare di un controllo lungo un asse solo. La scelta può ricadere quindi su un controllo proporzionale, che a fronte di condizioni di lancio assicura uno smorzamento delle velocità angolari accettabile viste le restrizioni che si hanno.

Quando si considera il rumore di misura, la stima della derivata del campo magnetico terrestre risulta fortemente rumorosa, quindi vi è presente una notevole incertezza che rende la taratura delle costanti per il controllo a commutazioni differente rispetto al caso in assenza di rumore: in questa circostanza infatti le costanti devono essere tarate considerando valori più bassi di K . Questo accade perchè aumentando questo valore le coppie di controllo diverrebbero esageratamente forti e causerebbero un'amplificazione del rumore di misura e del dipolo invece di limitarle e quindi le prestazioni del satellite sarebbero scadenti.

Conclusioni

In questa tesi sono stati affrontati diversi argomenti relativi alla determinazione del sistema di controllo dell'assetto di una navicella. Si è partiti dalla descrizione matematica delle componenti che agiscono su un satellite definendone dei modelli e si è giunti all'analisi e alla valutazione dei risultati ottenuti con diverse tecniche di controllo.

Nella prima parte della tesi sono state introdotte e discusse tutte le competenze teoriche indispensabili per produrre un modello che potesse funzionare al meglio. Questo modello è stato validato nelle sue diverse parti con vari test, o confronti con dati disponibili, che ne hanno attestato la bontà.

La parte sul controllo d'assetto, invece, necessita di spiegazioni particolari. Il controllo d'assetto è stato ottenuto facendo uso di attuatori magnetici, che sono una speciale classe di attuatori a basso peso, particolarmente adatti per il controllo d'assetto di un satellite in funzione del loro basso costo e della loro alta affidabilità. Tuttavia, a dispetto dei loro apparenti vantaggi, l'adozione di attuatori magnetici è generalmente limitata a satelliti di piccole dimensioni, che hanno orbite piuttosto basse. Questi attuatori, infatti, creano una complessità addizionale nel problema del controllo, in quanto introducono una dinamica a ciclo chiuso tempo-periodica, cioè si ottiene un sistema tempo variante, ma periodico.

Il presente lavoro dunque ha trattato il problema del controllo solamente come aspetto finale, culmine di un lavoro di modellizzazione su tutti quegli aspetti che governano il moto di una navicella; inoltre il problema del controllo è stato ed è fortemente vincolato dalle dimensioni e dalle finalità che il progetto AtmoCube deve assolvere: si è visto come un controllo magnetico su tre assi ottenga dei risultati molto buoni, sfruttando una tecnica di controllo non lineare, tuttavia i limiti fisici della navicella non permettono l'inserimento di tre bobine all'interno di un cubo di così ridotte dimensioni. A causa di ciò si è dovuti passare, utilizzando la medesima politica di controllo, alla simulazione con un unico attuatore posto lungo un asse corpo della navicella; questo ha posto, come si è visto, severi problemi al controllo, in quanto

con una sola bobina, non è possibile ottenere un controllo su tre assi.

Per quello che riguarda i possibili sviluppi futuri, un intervento utile sarebbe quello di inserire all'interno del modello una sezione che si occupi di stabilire rigorosamente un bilancio energetico dei consumi di tutta la strumentazione posta sul satellite. Questo sviluppo risulterebbe molto utile al fine di stabilire il consumo della batteria posta a bordo della navicella: la squadra di AtmoCube ha effettuato molte analisi di consumi, che però fanno uso di valori medi di potenze consumate da ogni singolo strumento. Si potrebbe pensare di effettuare un'analisi rigorosa della caratteristica di carica-scarica della batteria lungo il tempo di vita di AtmoCube, visto che si può conoscere anche il consumo del sistema di controllo.

Quest'analisi sarebbe molto utile anche per evitare fenomeni di scarica della batteria in pochi istanti, che ovviamente sono da evitare; è importante che questo fenomeno non avvenga soprattutto in fase di lancio quando il momento angolare da smorzare è particolarmente elevato, quindi il sistema di controllo è fortemente sollecitato e perciò si generano delle coppie di controllo che possono essere rilevanti e creare delle correnti che scarichino in fretta la batteria. Inoltre, cosa da non sottovalutare, sarà importante effettuare delle simulazioni in cui si tenga conto se, il giorno in cui avverrà il lancio, sarà soleggiato o meno, in quanto questo inciderà sulle potenzialità di carica dei pannelli fotovoltaici posti a bordo di AtmoCube.

Elementi di Astrodinamica

Per descrivere il moto di una navicella nello spazio sono necessari due prerequisiti: un sistema di coordinate a cui la traiettoria della navicella è riferita e la sequenza di istanti di tempo corrispondenti ad ogni posizione occupata dal satellite durante il suo moto.

A.1 Sistemi di Riferimento

I sistemi di riferimento più usati in astrodinamica descrivono il moto di un punto nello spazio da una prospettiva terrestre. La definizione di un sistema di riferimento spaziale è un prerequisito per definire dei primi sistemi di tempo, scoperti sulla base dell'osservazione dei fenomeni fisici. Inoltre, è degno di nota che, semplicemente dall'idea che il raggio della sfera celeste sia interpretabile come la distanza radiale dal centro della Terra al corpo, il cui moto si è interessati a monitorare, è possibile annullare l'indeterminatezza introdotta dalla definizione di sfera celeste e caratterizzare completamente un punto in movimento nello spazio.

L'asse di rotazione terrestre si interseca con la sfera celeste identificando due punti molto importanti: il Polo Australe (AP) nell'emisfero Australe e il Polo Boreale (BP) nell'emisfero Boreale. Il piano passante attraverso il centro della Terra e ortogonale alle linee AP - BP disegna sulla sfera celeste l'equatore celeste. Un punto P nello spazio (figura A.1) è localizzato dal proprio azimuth A e la sua distanza dallo zenith \bar{h}

Detto ciò, i sistemi di riferimento usati possono essere definiti come segue:

- **Sistema di riferimento geocentrico equatoriale**, anche chiamato Earth-Centered Inertial (ECI). Il sistema di riferimento ECI (vedi figura A.2(a)) è un sistema di riferimento Cartesiano non rotante centrato nel centro della terra. L'asse z è allineato con l'asse di rotazione terrestre (PA - PB) e punta verso il NORD, laddove il piano equatoriale forma il piano di riferimento x - y . L'asse x è allineato con la node line, cioè la direzione $\gamma - \Omega$, puntante verso l'equinozio vernale γ ; l'asse y completa una terna destrorsa ortogonale. La posizione di un

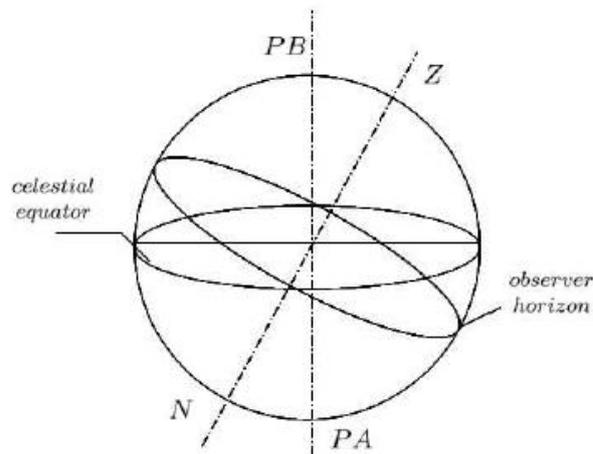
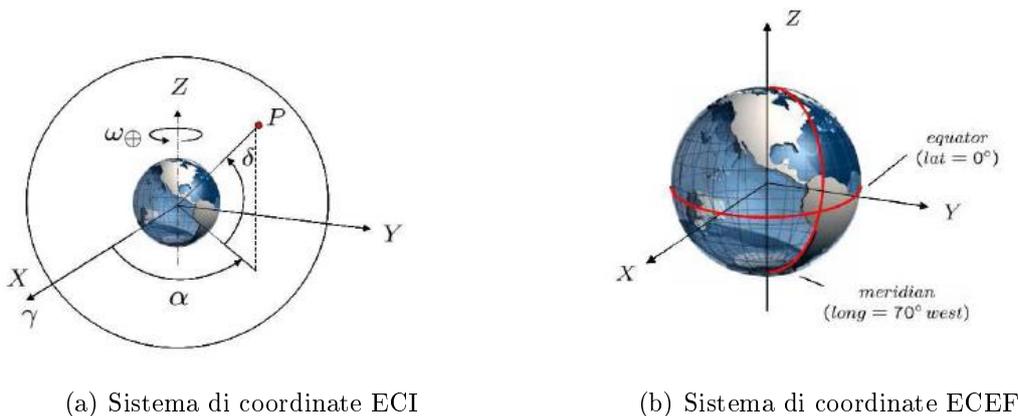


Figura A.1: Punto zenith e nadir



(a) Sistema di coordinate ECI

(b) Sistema di coordinate ECEF

punto nello spazio è definita in termini della propria ascensione retta e della declinazione;

- **Sistema di riferimento Earth-Centered Earth-Fixed (ECEF).** L'origine di questo sistema di coordinate (vedi figura A.2(b)) è locata nel centro della Terra. L'asse x giace nel piano equatoriale ed è allineato con il meridiano di Greenwich. L'asse z è posto in direzione PA - PB e punta verso PA. L'asse y completa una triade ortogonale destrorsa. Un punto nello spazio è completamente definito in termini della propria latitudine e longitudine.
- **Sistema di riferimento Orbitale,** anche noto con l'acronimo LVLH (Local Vertical Local Horizontal). L'origine di questo sistema è il centro di massa della navicella; l'asse x punta verso il centro della Terra, l'asse y è normale al piano orbitale; infine l'asse z punta in direzione del vettore velocità orbitale e completa un sistema di coordinate destrorso.

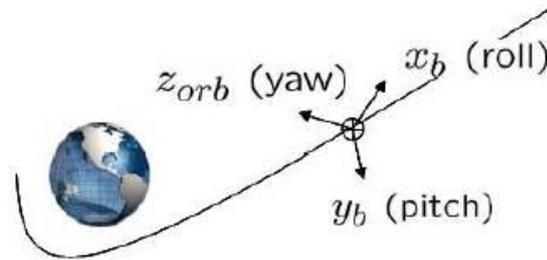


Figura A.2: Riferimento corpo

- **Assi corpo del Satellite.** L'origine di questo sistema di riferimento (vedi figura A.2) è locata nel centro di massa del satellite. Come il nome suggerisce, gli assi corpo formano una triade Cartesiana mutuamente ortogonale. In condizioni di puntamento alla Terra nominali, gli assi x_b (roll), y_b (pitch) e z_b (yaw) dovrebbero essere allineati ai corrispondenti assi orbitali x, y e z .

Il passaggio dal sistema di riferimento ECEF a quello ECI richiede la conoscenza dell'ascensione retta del meridiano di Greenwich α_G ; per poter passare da un sistema di riferimento all'altro si utilizza la seguente formula:

$$\begin{bmatrix} X_{ECI} \\ Y_{ECI} \\ Z_{ECI} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_G & -\sin \alpha_G & 0 \\ \sin \alpha_G & \cos \alpha_G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{ECEF} \\ Y_{ECEF} \\ Z_{ECEF} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

La trasformazione A.1 rappresenta, come si può vedere, una rotazione lungo l'asse z .

A.2 Tempo

L'unità base della misura del tempo astronomico è il giorno, definito come il periodo di tempo tra due istanti di tempo consecutivi quando la proiezione di un astro sulla sfera celeste appartiene ad un dato meridiano. Dipende da quale astro viene considerato (Sole, Luna o un pianeta), il giorno può prendere il nome di giorno Solare, giorno Lunare o giorno planetario. Un giorno è convenzionalmente suddiviso in 24 ore, ognuno composto di 60 minuti o 3600 secondi. I sistemi comunemente usati per la misura del tempo astronomico sono:

- **Local Mean Time (LMT).** Si consideri un Sole fittizio (vedi figura A.3) passante dal perigeo e apogeo dell'ellisse simultaneamente con il Sole, ma con un ritmo costante, e un Sole Principale, che si muove lungo l'equatore celeste ad una velocità costante e passante dal punto dell'equinozio γ . Quidi, il giorno

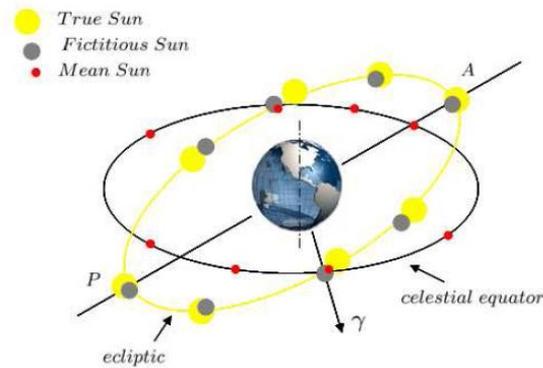


Figura A.3: Moti apparenti per il Sole, Sole fittizio e il Sole Principale

medio solare, può essere definito come l'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi del Sole Principale dal meridiano di osservazione. Il giorno solare è lungo $24^h 03^m 56.56^s$.

- **Greenwich Meridian Time**(*GMT*), o **Universal Time**(*UT*). L'*UT* è il Local Mean Time misurato da un osservatore posto sul meridiano di Greenwich, perciò, così facendo, si vanificano i problemi associati se prendessimo un osservatore generico. In modo da trovare lo *UT* è sufficiente sottrarre la longitudine geografica (positiva in direzione OVEST) al Local Mean Time.
- **Data Giuliana**(*JD*). Il calendario civile, che misura il tempo in termini di anni, mesi e giorni, fornisce una conveniente scala per il tempo della nostra vita. Non è, tuttavia, adatta per calcoli astronomici, dove la sottrazione di date o incrementi di date da un certo intervallo di tempo è la regola. In modo da far fronte a queste difficoltà, è stata introdotto un contatore di giorni continuo, realizzata da Joseph Justus Scaliger. La Data Giuliana misura il tempo partendo dal 4713 A.C. (la data del primo evento storico mai registrata), la conta parte il primo gennaio 4713 A.C. a mezzogiorno, quando un osservatore posto al meridiano di Greenwich avrebbe registrato il meridiano del Sole passare dal proprio zenith. Ogni giorno Giuliano dura esattamente 24 ore, o una rotazione di 360° della Terra attorno al suo asse. Quindi, il giorno della settimana può essere ottenuto dal resto della divisione della data Giuliana per 7.

Parametrizzazione d'assetto

B.1 Introduzione

La presente appendice ha come scopo quello di fornire i concetti base per lo studio dell'assetto, come la parametrizzazione, la matrice dei coseni direttori e come si può rappresentare l'assetto con i quaternioni.

B.2 Matrice dei Coseni Direttori

Il termine assetto indica l'orientamento di una terna ortogonale di assi rispetto ad un sistema di riferimento; la definizione stessa di assetto è basata su quella di matrice dei coseni direttori perchè l'orientamento di una terna ortogonale rispetto ad un sistema di riferimento, può essere espresso in modo completo proprio da una matrice dei coseni direttori.

Si supponga di prendere il sistema di riferimento di figura B.1 in cui gli assi x,y,z sono gli assi solidali al satellite e un sistema di riferimento inerziale individuato dagli assi 1,2,3. Si definisce la matrice $[A]$ come:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

dove x_1, x_2, x_3 sono le componenti del vettore x proiettate lungo gli assi del sistema inerziale, quindi $x = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$, in modo del tutto identico si definiscono y e z . Si ipotizzi ora di aver definito un vettore nel sistema di riferimento inerziale e di volerlo calcolare nel sistema di riferimento rotante della navicella; per fare questo si prenda il vettore $a = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ come il vettore le cui componenti sono espresse nel sistema di riferimento inerziale, e a_B il vettore a espresso in coordinate solidali al satellite. Per ottenere a_b la semplice operazione da fare è:

$$a_b = [A]a \quad (\text{B.2})$$

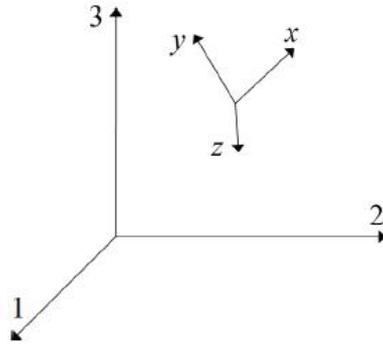


Figura B.1: Orientamento degli assi del satellite x,y,z rispetto al sistema di riferimento $1,2,3$

B.2.1 Proprietà Base della Matrice dei Coseni Direttori

Alcune delle proprietà della matrice $[A]$ sono:

- I versori x,y,z sono di norma unitaria

$$\|x\| = 1 \quad \|y\| = 1 \quad \|z\| = 1 \quad (\text{B.3})$$

- I versori x,y,z sono ortogonali tra loro, cioè:

$$\sum_{i=1}^3 x_i y_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 x_i z_i = 0 \quad \sum_{i=1}^3 y_i z_i = 0 \quad (\text{B.4})$$

- Sfruttando le due proprietà appena esposte è possibile dimostrare che

$$A^T = A^{-1} \quad (\text{B.5})$$

- E' noto che $\det[A] = x \cdot (y \times z)$; dal momento che x,y,z formano una triade ortogonale, segue che $\det[A] = 1$. Perciò:

$$a = A^T a_b \quad (\text{B.6})$$

- Si dimostra che esiste sempre un autovettore e con autovalore unitario tale per cui:

$$Ae = e \quad (\text{B.7})$$

cioè l'autovettore ha le stesse componenti nei due sistemi di riferimento.

- Nel caso si debbano fare più rotazioni consecutive, è possibile definire il prodotto di due o più matrici di rotazioni, ad esempio se $A = A_2 A_1$, allora il vettore moltiplicato per A verrà ruotato per A_1 e successivamente per A_2 .
- La matrice d'assetto è una matrice di rotazione completa, quindi non cambia il modulo del vettore ruotato.

B.3 I Quaternioni

La definizione base di un quaternione è una conseguenza diretta delle proprietà della matrice dei coseni direttori [A]. Si è già visto come una matrice ortogonale ha almeno un autovalore unitario e quindi l'autovettore associato non viene cambiato dalla matrice [A], sia e_1 questo autovettore, quindi:

$$[A]e_1 = 1e_1 \quad (\text{B.8})$$

L'autovettore e_1 ha le medesime componenti lungo gli assi corpo o lungo il sistema di riferimento inerziale. Può essere dimostrato che ogni trasformazione di assetto nello spazio ottenuta attraverso rotazioni consecutive lungo i tre versori ortogonali del sistema di coordinate può essere ottenuta facendo un'unica rotazione attorno all'autovettore che è associato all'autovalore unitario.

Un quaternione è definito come un vettore:

$$\mathbf{q} = q_4 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \equiv q_4 + \mathbf{q} \quad (\text{B.9})$$

dove i versori \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} soddisfano le seguenti eguaglianze:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \quad (\text{B.13})$$

Il quaternione può essere rappresentato in forma matriciale come:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

dove q_r è la parte vettoriale e q_4 è quella scalare. La norma di \mathbf{q} è pari ad 1. Il coniugato di \mathbf{q} è pari a:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -q_r \\ q_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

La moltiplicazione tra due quaternioni p e q ha come risultato un quaternione che è somma delle rotazioni dei due singoli quaternioni ed è definita come:

$$p \times q = \begin{bmatrix} q_4 p_r + p_4 q_r + p_r \times q_r \\ q_4 p_4 - q_r^T p_r \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

In altre parole, se sono noti i quaternioni di due rotazioni successive, allora la moltiplicazione tra di loro ha come risultato un quaternione che definisce la rotazione totale.

B.3.1 Quaternioni e la Matrice dei Coseni Direttori

Gli elementi dei quaternioni possono essere espressi in termini del principale autovettore \mathbf{e} . Gli elementi sono definiti come:

$$q_1 = e_1 \sin(\alpha/2) \quad (\text{B.17})$$

$$q_2 = e_2 \sin(\alpha/2) \quad (\text{B.18})$$

$$q_3 = e_3 \sin(\alpha/2) \quad (\text{B.19})$$

$$q_4 = \cos(\alpha/2) \quad (\text{B.20})$$

Dove α è la rotazione angolare necessaria per passare dal sistema di riferimento inerziale a quello corpo.

La relazione tra quaternione e matrice dei coseni direttori può essere espressa come:

$$[A(q)] = (q_4^2 - |q_r|^2)I_3 + 2q_r q_r^T - 2q_4[Q] \quad (\text{B.21})$$

dove:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

e quindi risolvendo l'equazione B.21 si ricava:

$$[A(q)] = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

L'equazione B.23 permette quindi di esprimere i quaternioni in termini della matrice dei coseni direttori; sia gli elementi dei quaternioni sia gli elementi della matrice dei coseni direttori possono essere ricavati indipendentemente per mezzo di un'integrazione delle velocità angolari misurati lungo i tre assi corpo. Avendo calcolato un set di parametri (ad esempio gli elementi della matrice dei coseni direttori) è possibile ricavare i quaternioni tramite le relazioni già fornite, e viceversa.

Appendice **C**

Documentazione Magnetometro

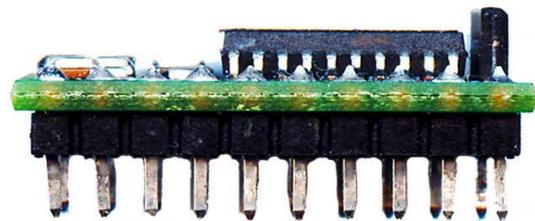
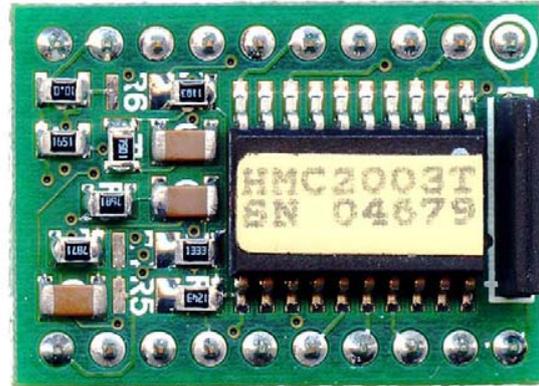
THREE-AXIS MAGNETIC SENSOR HYBRID

Features

- 20-pin Wide DIP Footprint (1" by 0.75")
- Precision 3-axis Capability
- Factory Calibrated Analog Outputs
- 40 micro-gauss to ± 2 gauss Dynamic Range
- Analog Output at 1 Volt/gauss (2.5V @ 0 gauss)
- Onboard +2.5 Volt Reference
- +6 to +15 Volt DC Single Supply Operation
- Very Low Magnetic Material Content
- -40° to 85°C Operating Temperature Range

General Description

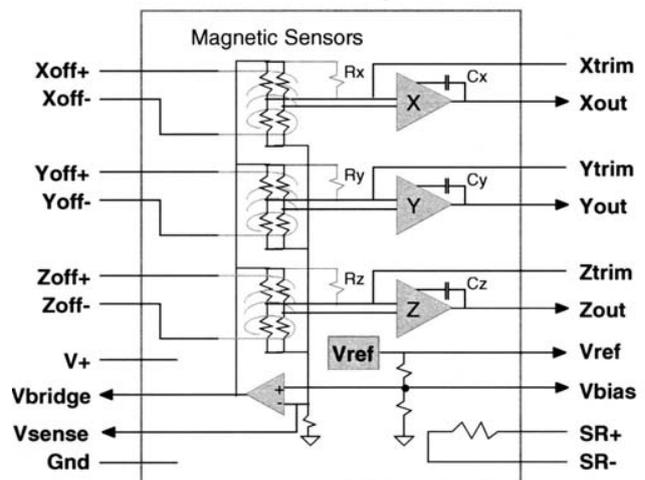
The Honeywell HMC2003 is a high sensitivity, three-axis magnetic sensor hybrid assembly used to measure low magnetic field strengths. Honeywell's most sensitive magneto-resistive sensors (HMC1001 and HMC1002) are utilized to provide the reliability and precision of this magnetometer design. The HMC2003 interface is all analog with critical nodes brought out to the pin interfaces for maximum user flexibility. The internal excitation current source and selected gain and offset resistors, reduces temperature errors plus gain and offset drift. Three precision low-noise instrumentation amplifiers with 1kHz low pass filters provide accurate measurements while rejecting unwanted noise.



APPLICATIONS

- Precision Compassing
- Navigation Systems
- Attitude Reference
- Traffic Detection
- Proximity Detection
- Medical Devices

BLOCK DIAGRAM



General Description

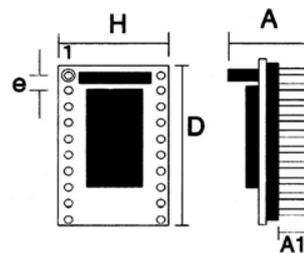
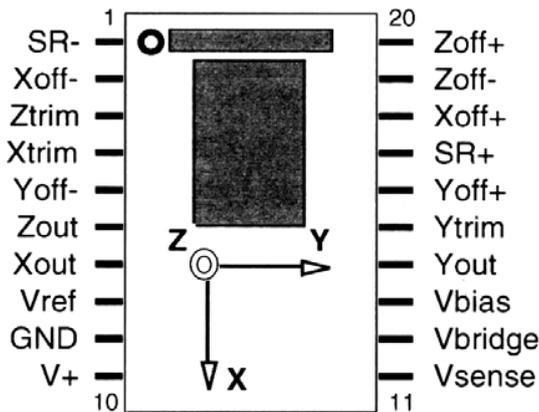
Honeywell's three axis magnetic sensor hybrid uses three permalloy magneto-resistive sensors and custom interface electronics to measure the strength and direction of an incident magnetic field. These sensors are sensitive to magnetic fields along the length, width, and height (X, Y, Z axis) of the 20-pin dual-in-line hybrid. Fields can be detected less than 40 microgauss and up to ± 2 gauss. Analog outputs are available for each X, Y and Z axis from the hybrid. With the sensitivity and linearity of this hybrid, changes can be detected in the earth's magnetic field to provide compass headings or attitude sensing. The high bandwidth of this hybrid allows for anomaly detection of vehicles, planes, and other ferrous objects at high speeds.

The hybrid is packaged on a small printed circuit board (1" by 0.75") and has an on-chip +2.5 voltage reference that operates from a single 6 to 15V supply. The hybrid is ideal for applications that require two- or three-axis magnetic sensing and have size constraints and need a magnetic transducer (magnetometer) front-end. Note that the hybrid's resistor values will vary, or an absence of some resistor components, is likely due to individual factory calibration.

Integrated with the sensor elements composed of wheatstone bridge circuits, are magnetically coupled straps that replace the need for external field coils and provide various modes of operation. The Honeywell patented integrated field offset straps (Xoff+ and Xoff-, etc.) can be used electrically to apply local magnetic fields to the bridges to buck, or offset an applied incident field. This technique can be used to cancel unwanted ambient magnetic fields (e.g. hard-iron magnetism) or in a closed loop field nulling measurement circuit. The offset straps nominally provide 1 gauss fields along the sensitive axis per 48mA of offset current through each strap.

The HMC2003's magnetic sensors can be affected by high momentary magnetic fields that may lead to output signal degradation. In order to eliminate this effect, and maximize the signal output, a magnetic switching technique can be applied to the bridge using set/reset pins (SR+ and SR-) that eliminates the effect of past magnetic history. Refer to the application notes that provide information on set/reset circuits and operation.

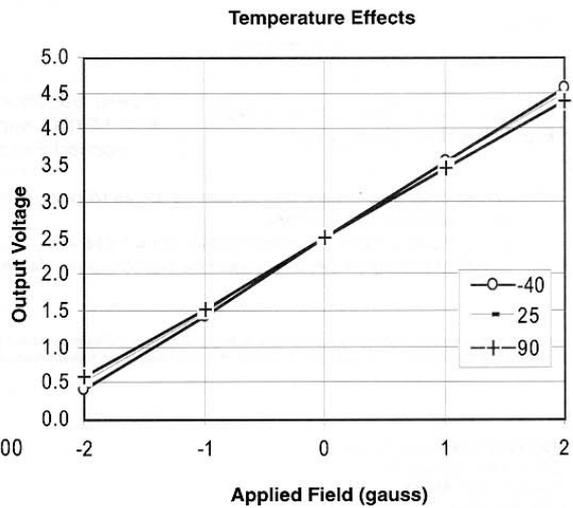
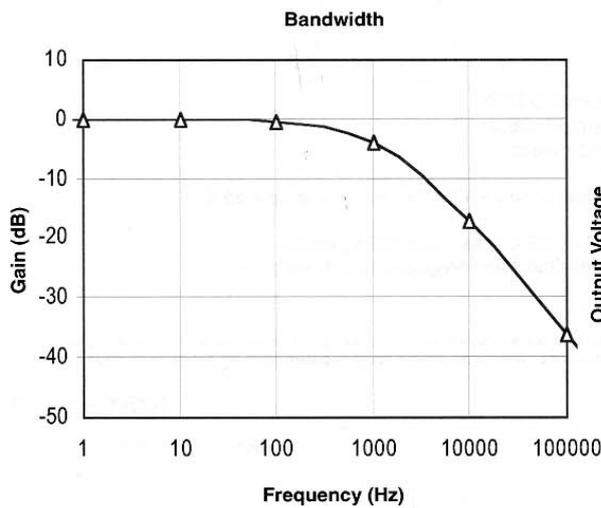
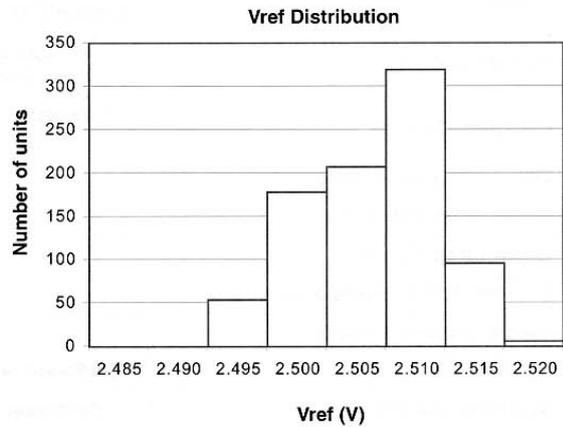
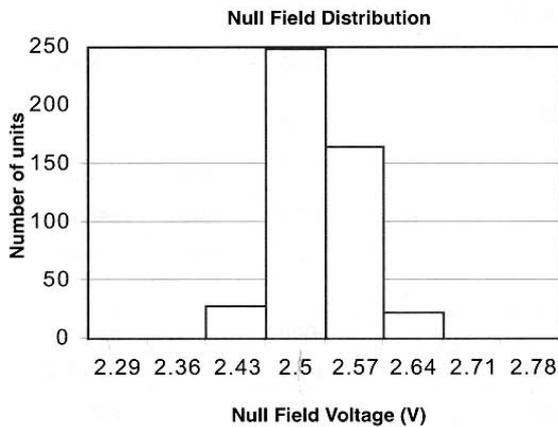
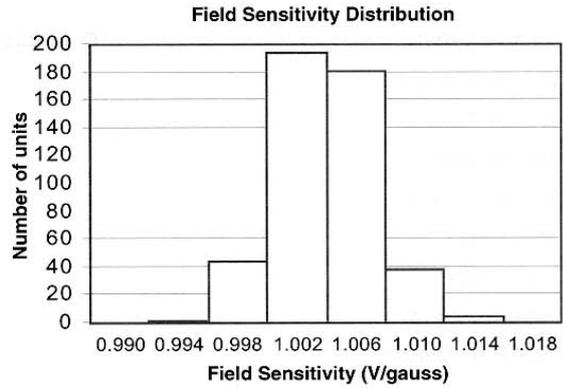
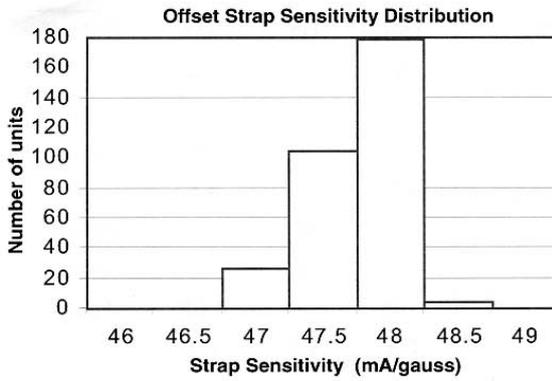
Pinout Diagram and Package Drawing



Symbol	Millimeters		Inches	
	Min	Max	Min	Max
A	10.92	11.94	0.43	0.47
A1	2.92	3.42	0.115	0.135
D	25.91	27.30	1.02	1.075
e	2.41	2.67	0.095	0.105
H	18.03	19.69	0.71	0.775

Ordering Information

Ordering Number	Product
HMC2003	Three-Axis Magnetic Sensor Hybrid



Honeywell reserves the right to make changes to improve reliability, function or design. Honeywell does not assume any liability arising out of the application or use of any product or circuit described herein; neither does it convey any license under its patent rights nor the rights of others.

Bibliografia

- [1] BOLZERN P., SCATTOLINI R., SCHIAVONI N., *Fondamenti di controlli automatici*, McGraw-Hill, (2004)
- [2] BONG WIE *Integreted orbit, attitude, and structural control system design for space solar power satellites* Nasa Contract NAS1-00122 Final Report, (2001)
- [3] POLLARD JAMES E. *Simplified approch for assessment of low-thrust elliptical orbits transfers* The Aerospace Corporation, (1997)
- [4] CORNO M, LOVERA M. *Spacecraft attitude dynamics and control in the presence of large magnetic residuals* Control Engineering Practice, 2008
- [5] PULECCHI T., CASELLA F., LOVERA M. *Object-oriented modelling for spacecraft dynamics: tools and applications* Simulation Modelling Practice and Theory, 2009
- [6] SILANI E., LOVERA M. *Magnetic spacecraft attitude control: a survey and some new results* Control Engineering Practice, 2003
- [7] RASHMI BHARDWAY, PARSAN KAUR *Satellite's motion under the effect of magnetic torque* American Journal of Applied Sciences, 2006
- [8] TRAINELLI L. *Lezioni di meccanica del volo- modello dell'atmosfera* Politecnico di Milano, 2008
- [9] STEPHEN STANKEVICH *Atmospheric torque calculation report* Colorado Space Grant Consortium, 2006
- [10] COTTAFASI STEFANO *Corso di meccanica del volo spaziale II* DIA-Politecnico di Milano, 2003
- [11] PULECCHI TIZIANO *Advanced techniques for satellites modeling and attitude control* Politecnico di Milano - Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Informazione, 2008

-
- [12] BONA BASILIO *Quaternioni* DAUIN - Politecnico di Torino, 2008
- [13] LOVERA MARCO *Introduzione al controllo d'assetto di piccoli satelliti* Politecnico di Milano - Dipartimento di Elettronica e Informazione
- [14] ALBERTI V. *Il campo magnetico terrestre misurato dal satellite AtmoCube* Università degli studi di Trieste, (2003)
- [15] NITIN SETH *Hybrid magnetic attitude controller for low-Earth orbit satellites using the time-varying linear quadratic regulator* University of Toronto - Department of Aerospace Science and Engineering, 2009
- [16] MOREA DANILO *Introduzione al controllo d'assetto di satellite* Carlo Gavazzi Space SPA
- [17] MARCEL J. SIDI *Spacecraft dynamics and control. A practical engineering approach* Cambridge University Press, 2001
- [18] TAVARES P., CLEMENTS R. *Stabilization and control of small satellites* Instituto Superior Tecnico Lisbona, 1999
- [19] RADTKE GREGG *Momentum damping* University of Arizona - Student Satellite Project, 1999
- [20] GIORGI N. *Studio dell'analisi termica e dell'assetto per il satellite didattico AtmoCube* Università degli studi di Trieste, (2008)
- [21] KALIS WILBERT *The attitude stabilization system of the Delfi micro satellite* Delfi Aerospace, 2000
- [22] KRISTIN L. MAKOVEC *A nonlinear magnetic controller for three-axis stability of nanosatellites* Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001
- [23] PSIAKI M., GUELMAN M., WALLER R., SHIRYAEV A. *Design and testing of magnetic controllers for satellite stabilization* Asher Aerospace Research Institute, Haifa and Cornell University, Ithaca
- [24] HERBERT GOLDSTEIN *Meccanica classica* Zanichelli Editore Bologna, 1986
- [25] BERGAMASCO M. *Determinazione e controllo d'assetto di satelliti mediante misure del campo magnetico terrestre* Politecnico di Milano, (2008)
- [26] CIANI M. *Studio del sistema di assetto del satellite AtmoCube tramite attuatori magnetici* Università degli studi di Trieste, (2003)
- [27] CUTTIN ALESSANDRO. *Progetto di sistema del satellite AtmoCube architettura di comunicazione e architettura di sistema* Università degli studi di Trieste, (2006)

- [28] MARISSA HERRON, BARRY GOEREE, BRIAN SHUCKER *Detumbling of UASat* University of Arizona Student Satellite Project, 2000
- [29] BOHM C., MERK M., FICHTER W., ALLGOWER F. *Spacecraft rate damping with predictive control using magnetic actuators only* University of Stuttgart, 2009
- [30] K.N. WANG, J.C. JUANG, Y.F. TSAI *Design and verification of the LEAP attitude control system* 7th Asian Control Conference, Honk Kong, 2009
- [31] MARK WOOD, WEN-HUA CHEN *Regulation of magnetically actuated satellites using model predictive control with disturbance modelling* IEEE International Symposium on, Mediterranean Conference on, Control and Automation, 2005
- [32] DE MILLERI N. *Progettazione del sistema di alimentazione del satellite AtmoCube* Università degli studi di Trieste, (2009)
- [33] JAYANT KULKARNI, MARK CAMPBELL *An approach to magnetic torque attitude control of satellites via ' H_∞ ' control for LTV systems* 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004
- [34] T.R.KROGSTAD, J.T. GRAVDAHL, P. TONDEL *Explicit model predictive control of a satellite with magnetic torquers* 13th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Limassol, Cyprus, 2005
- [35] LOVERA M., ASTOLFI A. *Global magnetic attitude control of spacecraft* 43rd IEEE Conference on Decision and Control, 2004
- [36] LOVERA M., DE MARCHI E., BITTANTI S. *Periodic attitude control and techniques for small satellites with magnetic actuators* IEEE Transaction on Control System Technology, 2002
- [37] T.W.FLATLEY, W.MORGENTERN, A.RETH, F.BAUER *A B-Dot acquisition controller for the RADARSAT spacecraft* Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, 1997
- [38] RIIHIMAKI P., J.P. YLEN *Simulation of spacecraft attitude and orbit dynamics* Helsinki University of Technology
- [39] J.R.WERTZ, W.J. LARSON *Space mission analysis and design* Space Technology Library, 2003
- [40] CAVALLO A., SETOLA R., F.VASCA *La nuova guida a Matlab Simulink e Control Toolbox* Liguori, 2002
- [41] LOVERA M., ASTOLFI A. *A novel architecture for magnetic attitude control of gravity gradient satellites* Elsevier IFAC Publications, 2004

-
- [42] G. INALHAN, M. TILLERSON, J.P.HOW *Relative dynamics and control of spacecraft formations in eccentric orbits* Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2002
- [43] PSIAKI M.L., MARTEL F., PAL P.K *Three-axis attitude determination via Kalman filtering of magnetometer data* Journal of Guidance, 1989